



Р Я Д Ы



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

РЯДЫ

*Учебное пособие для студентов-заочников
III курса физико-математических факультетов
педагогических институтов*

*Рекомендовано к печати Главным управлением
высших и средних педагогических
учебных заведений*

А в т о р ы:

Н. Я. Виленкин, В. В. Цукерман, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *М. И. Граев* (МГЗПИ),
кандидат физико-математических наук,
доцент *А. С. Симонов* (ТГПИ),
кандидат физико-математических наук,
доцент *В. А. Тонян* (МИЭМ)

Редактор МГЗПИ *О. А. Павлович*

Р $\frac{4309020400-245}{103 (03)-82}$

заказное



ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга является учебным пособием для студентов-заочников физико-математических факультетов пединститутов по разделам «Ряды» и «Ряды Фурье» программы курса «Математический анализ». Мы не сочли целесообразным, в отличие от действующей сейчас программы, отрывать изучение рядов Фурье от изучения функциональных рядов. Кроме того, мы считали полезным до изучения общей теории числовых и функциональных рядов получить разложение в степенные ряды основных элементарных функций — это позволяет студентам заранее приобрести общую ориентировку в вопросах, с которыми им предстоит познакомиться.

Первая глава книги содержит основные понятия о рядах и доказательство свойств сходящихся рядов, а также вывод формул для разложения элементарных функций в степенные ряды.

Вторая глава посвящена числовым рядам. Отметим упрощение доказательств теоремы об умножении рядов и теоремы Лейбница, для последней доказательство непосредственно сводится к теореме о стягивающейся системе отрезков (иной формулировкой, которой она и является). Одновременно рассматриваются числовые ряды в комплексной области.

Третья и четвертая главы посвящены функциональным и, в частности, степенным рядам как в действительной, так и в комплексной областях. Вопрос о равномерной сходимости последовательностей функций изложен на основе понятия о чебышевском расстоянии между функциями, что позволило упростить как формулировку самого понятия равномерной сходимости, так и доказательство основных теорем. Отметим доказательство теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда в комплексной области. Ради упрощения курса мы не рассматриваем формулу Коши — Адамара, поскольку формулировка соответствующего утверждения потребовала бы включения в курс понятия верхнего предела последовательности, тогда как сама эта формула практически используется редко.

Последняя глава книги посвящена изучению рядов Фурье, доведенному до теоремы о сходимости ряда Фурье кусочно-гладкой функции. Заключительная часть этого раздела, связанная с

ортонормированными базисами в гильбертовом пространстве, изложена в § 20 книги Н. Я. Виленкина, М. Б. Балка и В. А. Петрова «Математический анализ. Мощность, метрика, интеграл», выпущенной издательством «Просвещение» в 1980 г.

Предлагаемая книга входит в серию учебных пособий для студентов-заочников по математическому анализу, выходящих под общим руководством профессора Н. Я. Виленкина (ранее опубликованы книги «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Мощность, метрика, интеграл»). В основу книги легли лекции, неоднократно читавшиеся авторами студентам МГЗПИ. Ранее был издан ротاپринтный вариант этой книги. Теоретическая часть настоящего пособия написана Н. Я. Виленкиным и В. В. Цукерманом. Упражнения составлены М. А. Доброхотовой, А. Н. Сафоновым и В. В. Цукерманом.

Книга разбита на главы, параграфы и пункты. Нумерация теорем, лемм, примеров и формул сплошная в пределах каждого параграфа. Почти все параграфы снабжены упражнениями и вопросами для самопроверки.

Авторы выражают глубокую благодарность за тщательное рецензирование, способствовавшее улучшению рукописи, профессору М. И. Граеву и доцентам А. С. Симонову, В. А. Тоняну и П. П. Мосолову (ротاپринтный вариант), а также кафедре математического анализа Тульского педагогического института им. Л. Н. Толстого.

Авторы просят присылать отзывы и замечания по адресу: Москва, 129846, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе алгебры и начал анализа обычно рассматривают суммы, состоящие из конечного числа слагаемых. Единственным исключением является сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, т. е.

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots,$$

где $|q| < 1$. В курсе математического анализа изучаются суммы бесконечного множества слагаемых, или, как их называют, бесконечные ряды, которые являются действенным средством изучения функций и сильным вычислительным аппаратом, позволяющим находить с заданной точностью значения функций, вычислять приближенные значения интегралов и решать многие другие прикладные задачи.

Первоначально математики считали, что свойства бесконечных рядов аналогичны свойствам конечных сумм, и, не задумываясь, переставляли слагаемые, почленно дифференцировали и интегрировали бесконечные ряды, состоящие из функций, умножали один ряд на другой, так же, как перемножают многочлены, и т. д. Но потом выяснилось, что столь беззаботное обращение с бесконечными рядами может привести к ошибочным результатам (см. примеры 8.9 и 8.10), и потому возникла необходимость в построении строгой теории бесконечных рядов, основными задачами которой являются:

1) определение понятия суммы бесконечной последовательности слагаемых;

2) установление признаков, по которым можно судить, имеет ли данный ряд сумму;

3) выделение классов рядов, с которыми можно обращаться как с конечными суммами (например, переставлять члены ряда, почленно дифференцировать и интегрировать ряды, состоящие из функций, и т. д.);

4) выведение формул, позволяющих представить заданные функции в виде сумм рядов, состоящих из сравнительно простых функций;

5) изучение рядов, состоящих не только из действительных, но и из комплексных чисел.

Решению этих задач и посвящен курс «Теория рядов».

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛОРА

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. СХОДИМОСТЬ И РАСХОДИМОСТЬ
ЧИСЛОВОГО РЯДА

1. Числовые ряды.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Числовым рядом* с общим членом a_n называют последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, соединенных знаком сложения, т. е. выражение вида:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Такой ряд записывают также в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

П р и м е р 1.1. Если $a_n = \frac{1}{n^2}$, то ряд имеет вид:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Иногда при записи ряда выписывают только несколько его первых членов. Это делают лишь тогда, когда закономерность, характерная для членов ряда, легко усматривается. Строго говоря, такой способ задания ряда не является математически корректным, так как получение формулы общего члена по нескольким первым членам ряда — задача, не имеющая однозначного решения.

П р и м е р 1.2. Напишем одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена:

$$\frac{2}{2} + \frac{5}{6} + \frac{8}{18} + \frac{11}{54} + \dots$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала последовательность числителей 2, 5, 8, 11. Они образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2, а разность равна 3. Это позволяет в качестве общего выражения для числителя взять формулу общего члена арифметической прогрессии: $2 + 3(n - 1) = 3n - 1$. Знаменатели 2, 6, 18, 54 образуют геометрическую прогрессию с

первым членом 2 и знаменателем 3. В качестве их общего выражения можно взять формулу общего члена геометрической прогрессии $2 \cdot 3^{n-1}$. Итак, общий член ряда будет иметь следующий вид:

$$a_n = \frac{3n-1}{2 \cdot 3^{n-1}}.$$

Следует отметить, что в качестве общего члена можно было бы принять и более сложное выражение

$$\frac{3n-1}{2 \cdot 3^{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)},$$

которое совпадает с написанным выше при $n = 1, 2, 3, 4$.

Числа a_n могут быть как положительными, так и отрицательными. Иногда бывает целесообразно записать ряд

$$a_1 + (-a_2) + a_3 + a_4 + (-a_5) + \dots$$

в виде:

$$a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

2. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Поскольку сложение бесконечного множества чисел не определено, то надо выяснить смысл суммы бесконечного ряда. Для этого поставим в соответствие ряду (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ бесконечную последовательность чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, где $s_1 = a_1$, а $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Мы будем называть число s_n *n-й частичной суммой ряда (A)*. Очевидно, что $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, и потому $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Числовой ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел, т. е. если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Значение s этого предела на-

зывается *суммой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, ряд называется *расходящимся*.

Будем условно писать $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ (соответственно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$).

В случае, когда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет сумму, будем иногда обозначать ее тем же символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что и сам ряд.

П р и м е р 1.3. Исследуем на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию, т. е. ряд:

$$a + aq + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (1.1)$$

Р е ш е н и е. Для этого ряда:

$$s_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, то выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0^1$, а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

Значит, при $|q| < 1$ исследуемая прогрессия сходится и ее сумма равна $\frac{a}{1 - q}$.

Если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = +\infty$, а потому и $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty$.

В этом случае последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, т. е. ряд (1.1) расходится. Этот ряд расходится и при $q = 1$. В этом случае $s_n = a + a + \dots + a = na$, а при $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} na = +\infty$. Наконец, ряд (1.1) расходится и при $q = -1$,

так как частичными суммами ряда $a - a + a - a \dots$ являются:

$$s_{2n} = a - a + \dots + a - a = 0,$$

$$s_{2n+1} = a - a + \dots + a - a + a = a.$$

Последовательность $a, 0, a, 0, \dots$, где $a \neq 0$, не имеет предела, а это и значит, что ряд расходится.

П р и м е р 1.4. Докажем, что ряд:

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots, \quad (1.2)$$

где $0 < \alpha < 1$, расходится.

Р е ш е н и е. Для этого ряда $s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$. Так как все члены этой суммы не меньше чем $\frac{1}{n^\alpha}$, а она состоит из n членов, то $s_n > n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = n^{1-\alpha}$. Но при $0 < \alpha < 1$ имеем $1 - \alpha > 0$ и, значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} = +\infty.$$

¹ В самом деле, если $0 < q < 1$, то последовательность $q, q^2, \dots, q^n, \dots$ монотонно убывает, а потому имеет предел $s = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n$.

Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = qs$. Но $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = s$, и потому $qs = s$. Поскольку $q < 1$, то $s = 0$. Итак, при $0 < q < 1$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. При $-1 < q < 0$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n |q|^n = 0$, а при $q = 0$ соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ очевидно.

Расходимость ряда (1.2) доказана.

Пример 1.5. Докажем, что ряд:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots \quad (1.3)$$

сходится, и найдем его сумму.

Решение. Пользуясь известным тождеством $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, находим, что

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

то ряд (1.3) сходится и его сумма равна 1.

Замечание. Рассмотрение примеров 1.3—1.5 может создать иллюзию, что и в общем случае исследование сходимости ряда можно провести таким же методом. В действительности это не так. Лишь в редких случаях (см. также упражнение 9) удается получить выражение для s_n , содержащее ограниченное число слагаемых, и непосредственно найти $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Обычно используются различные признаки сходимости. Этот материал излагается во второй главе.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется частичной суммой числового ряда?
2. Какая существует связь между n -й и $(n-1)$ -й частичными суммами ряда?
3. Что называется суммой ряда?
4. Какой ряд называется сходящимся?
5. Какой ряд называется расходящимся?
6. При разборе примера 1.3 из результата $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty$ делаем вывод, что не существует конечного предела s_n при $n \rightarrow \infty$. Почему?
7. В примере 1.3 указывается, что последовательность $a, 0, a, 0, \dots$, где $a \neq 0$, не имеет предела. На основании какого свойства предела последовательности сделано это заключение?
8. При рассмотрении примера 1.4 указывается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} = \infty$ ($0 < \alpha < 1$). Докажите это утверждение.

9. В примере 1.5 используется тождество $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Как можно получить это тождество?

Упражнения

1. По известной формуле для общего члена напишите 5 первых членов каждого из нижеприведенных рядов:

а) $a_n = \frac{n^3}{(n+1)!}$; б) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^3 + 1}$; в) $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}}$; г) $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$,

д) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} & \text{при } n = 2k-1, \\ \frac{1}{n^2} & \text{при } n = 2k. \end{cases}$

2. Напишите a_4, a_9, a_{15}, a_{17} , если

$$a_n = \begin{cases} (5-n)^2 & \text{при } 1 \leq n \leq 4, \\ \frac{1}{(n-4)^2} & \text{при } 5 \leq n \leq 15, \\ \frac{n-15}{n^2-8n} & \text{при } n \geq 16. \end{cases}$$

3. Пусть $a_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$. Напишите $a_{n+1}, a_{2n}, a_{3n-1}, a_{n^2}$.

4. $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$.

Напишите $a_{n+2}, a_{n+m}, a_{nm}, a_{n^2}$. Найдите отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

5. Пусть $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Найдите $(a_n)^2, (a_n)^3 + 1, \sqrt[n]{a_n}$.

6. По указанным первым членам ряда найдите одну из возможных формул для n -го члена каждого из нижеприведенных рядов:

а) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$;

б) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$;

в) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} + \dots$;

г) $1 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$;

д) $2 + \frac{2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$;

е) $1 - \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$.

7. По известной частичной сумме ряда определите общий член и найдите сумму каждого из нижеприведенных рядов:

а) $s_n = \frac{2 + 5^n}{5^n}$; б) $s_n = \frac{n}{n+1}$.

8. Запишите каждый из нижеприведенных рядов, используя знак суммы:

а) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{n^2 + 1} + \dots$;

в) $\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} + \dots$.

Проверьте также, правильно ли выписаны здесь первые члены ряда.

9. Найдите выражение для частичной суммы каждого из нижеприведенных рядов. В случае сходимости вычислите сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + (-1)^{n-1} 3^n}{7^n}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; и)* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

§ 2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1. Необходимый признак сходимости ряда. Остаток ряда. При определении суммы ряда мы писали $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Если отбросить от последовательности $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ p первых членов, то получившаяся последовательность $s_{p+1}, s_{p+2}, s_{p+3}, \dots, s_{p+n}, \dots$ будет иметь тот же предел s . Это значит, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, то для любого $p \in \mathbf{N}$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+p} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Теорема 2.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Тогда, как мы видели, и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} = s$. Но $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, а потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0.$$

Отсюда и следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает, что, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится (его общий член не стремится к нулю). Следует иметь в виду, что стремление к нулю общего члена ряда является лишь необходимым признаком сходимости, но не является достаточным — общий член может стремиться к нулю и в некоторых расходящихся рядах. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ расходится (см. пример 1.4), хотя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Назовем n -м остатком ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ряд, полученный отбрасыванием первых n слагаемых, т. е. ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} + \dots$$

Если этот ряд сходится, то его сумму обозначают r_n .

Т е о р е м а 2.2. Если ряд сходится, то сходится и каждый его остаток, причем выполняются равенства $s = s_n + r_n$, где s — сумма ряда. Обратно: если хотя бы один остаток ряда сходится, то сходится и сам ряд.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим p -ю частичную сумму ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ через σ_p :

$$\sigma_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}.$$

Ясно, что

$$s_{n+p} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = s_n + \sigma_p.$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{p \rightarrow \infty} s_{n+p} = s$, где s — сумма этого ряда. Тогда имеем:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_p = \lim_{p \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = s - s_n.$$

Мы доказали, что последовательность $\{\sigma_p\}$ сходится к числу $s - s_n$, т. е. что сумма ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ равна $s - s_n$. Таким образом, $r_n = s - s_n$, и тогда $s = s_n + r_n$.

Обратно: если ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна r_n , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) = r_n, \text{ и потому } \lim_{p \rightarrow \infty} s_{n+p} = s_n + r_n, \text{ т. е. ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится и его сумма равна $s_n + r_n$.

С л е д с т в и е. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.

В самом деле, в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s - s_n) = s - s = 0.$$

П р и м е р 2.1. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ найти величину r_n и указать такое значение N , чтобы при $n > N$ имело место неравенство: $|r_n| < 2 \cdot 10^{-4}$.

Воспользуемся решением примера 1.5 (там рассматривался этот же ряд). Мы имели:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad s = 1.$$

Следовательно,

$$r_n = s - s_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Решим неравенство

$$\frac{1}{n+1} < 2 \cdot 10^{-4}.$$

Имеем:

$$n+1 > \frac{10^4}{2} = 5000, \quad n > 5000 - 1 = 4999.$$

В качестве N можно взять любое целое число, не меньшее чем 4999.

2. Свойства сходящихся рядов. Некоторые свойства числовых рядов непосредственно вытекают из соответствующих свойств числовых последовательностей:

а) *Ряд не может иметь двух различных сумм.*

Это следует из того, что последовательность частичных сумм не может иметь двух различных пределов.

б) *Если данный ряд сходится, то и любой ряд, полученный из него группировкой слагаемых, сходится и имеет ту же сумму, что данный ряд.*

В самом деле, пусть первая группа состоит из n_1 слагаемых, вторая — из n_2 слагаемых, ... k -я — из n_k слагаемых, ..., т. е. пусть после группировки получается такой ряд:

$$(a_1 + \dots + a_{m_1}) + (a_{m_1+1} + \dots + a_{m_2}) + \dots + \\ + (a_{m_{k-1}+1} + \dots + a_{m_k}) + \dots, \quad (2.1)$$

где $m_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Тогда после группировки получится ряд, частичными суммами которого являются $s_{m_1}, s_{m_2}, \dots, s_{m_k}, \dots$. В самом деле, k -я частичная сумма ряда (2.1) состоит из скобок, в которые входят

члены от первого до $a_{n_1} + \dots + n_k$, т. е. до a_{m_k} . Поэтому она равна s_{m_k} . Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (2.1) является подпоследовательностью для $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$. Отсюда следует, что если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, то и последовательность частичных сумм ряда (2.1) сходится к тому же пределу s . Свойство доказано.

Отметим, что утверждение, обратное утверждению б), неверно, поскольку после группировки членов расходящегося ряда может получиться сходящийся ряд.

Пример 2.2. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Группируя члены этого ряда по два, получаем ряд из нулей

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots,$$

который, очевидно, сходится.

Поскольку последовательности являются функциями натурального аргумента, их можно складывать, умножать и т. д. В связи с этим можно говорить о сумме рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, т. е. о ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \text{ об умножении всех членов ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ на}$$

данное число λ (т. е. о ряде $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$) и т. д. Докажем следующие теоремы.

Теорема 2.3. Пусть ряды (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют соответственно суммы s и σ . Тогда сходится и ряд (C) = (A) + (B): $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, причем его сумма S равна $s + \sigma$.

Доказательство. Найдем n -ю частичную сумму ряда (A) + (B):

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

Переставляя слагаемые, получаем, что

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = s_n + \sigma_n,$$

где s_n — n -я частичная сумма ряда (A), а σ_n — n -я частичная сумма ряда (B). В силу теоремы о пределе суммы существует $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, причем

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s + \sigma.$$

Теорема 2.4. Если ряд $(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна s , то сходится и ряд $(C) = \lambda(A) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, причем его сумма σ равна λs .

Доказательство. Ясно, что n -я частичная сумма σ_n ряда $\lambda(A)$ имеет вид:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k = \lambda s_n.$$

Поэтому

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda s_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lambda s.$$

Разностью двух рядов (A) и (B) называют ряд $(A) - (B) = (A) + (-1)(B)$. Отсюда как следствие теорем 2.3 и 2.4 вытекает, что разность двух сходящихся рядов является сходящимся рядом. При этом если S — сумма ряда $(C) = (A) - (B)$, s и σ — суммы рядов (A) и (B) соответственно, то $S = s - \sigma$. Ясно, что $((A) - (B)) + (B) = (A)$.

Пример 2.3. Докажем, что сумма сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.

Доказательство проводим от противного. Пусть ряд (A) сходится, а ряд (B) расходится. Допустим, что ряд $(C) = (A) + (B)$ сходится. Тогда $(B) = (C) - (A)$ сходится как разность двух сходящихся рядов, что противоречит условию. Противоречие возникло из предположения, что ряд (C) сходится, значит, такое предположение ложно. Итак, ряд $(C) = (A) + (B)$ расходится.

Исходя из этого примера, легко показать, что если разность $(A) - (B)$ сходится, а один из рядов (A) или (B) расходится, то и другой ряд также расходится.

Заметим, что разность двух расходящихся рядов может сходиться.

Пример 2.4. Ряды

$$(A): \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n(n+1)}\right) \text{ и } (B): \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

расходятся, так как их общие члены не стремятся к нулю. Но

$$\text{ряд } (A) - (B): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ сходится.}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое из двух нижеприведенных утверждений истинно, а какое ложно?
 - а) Если общий член ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то ряд сходится.
 - б) Если ряд сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2. Как вычисляется сумма остатка r_n сходящегося ряда, если известны сумма ряда s и частичная сумма s_n ?
3. Может ли расходиться последовательность сумм остатков сходящегося ряда? К какому пределу она стремится?
4. Как определяются сумма и разность рядов? Какие утверждения можно сформулировать для суммы и разности двух рядов?
5. Как определяется произведение ряда на число? Как использовать операцию умножения ряда на число для записи разности двух рядов?
6. Как определить линейную комбинацию двух рядов $\alpha \cdot (A) + \beta \cdot (B)$, где $(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а $(B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n$?
7. Что может произойти с рядом, если произвести группировку членов путем расстановки скобок?
8. Может ли сходиться произведение расходящегося ряда на число?

Упражнения

10. Для нижеприведенных рядов найдите выражение для r_n и укажите такое N , чтобы при $n > N$ выполнялось соотношение $|r_n| < \varepsilon$:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2}$, $\varepsilon = 10^{-6}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\varepsilon = 10^{-6}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $\varepsilon = 10^{-6}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$, $\varepsilon = 10^{-4}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

11. Докажите, что если ряд $(C) = (A) + (B)$ сходится, а ряд (A) расходится, то ряд (B) также расходится. Приведите пример.

12. Используя пример 2.4, укажите расходящийся ряд, который можно превратить в сходящийся путем расстановки скобок.

13. С помощью необходимого признака сходимости установите, какие из указанных рядов заведомо расходятся:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$.

14. Запишите сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ (см. упражнение 9, ж) в виде разности двух расходящихся рядов.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ИХ ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим теперь ряды, членами которых являются не числа, а функции.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... заданы на одном и том же множестве X . Назовем *функциональным рядом с общим членом $u_n(x)$* выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Если заменять в этом выражении переменную x любым числом x_0 из X , то получим числовой ряд:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

Таким образом, каждый функциональный ряд определяет множество числовых рядов, получаемых из него подстановкой вместо переменной ее значений. Эти числовые ряды могут сходиться при одних значениях аргументов и расходиться при других значениях. Например, как мы знаем, ряд

$$1 + x + \dots + x^{n-1} + \dots$$

сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| \geq 1$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Множество значений аргумента x , при которых сходится функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, называется *областью сходимости* этого ряда.

Таким образом, каждому значению x_0 из области сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ соответствует число $s(x_0)$ — сумма данного ряда при $x = x_0$. Тем самым в области сходимости ряда определена функция $s(x)$, называемая *суммой* этого ряда. Частичные суммы ряда будем обозначать $s_n(x)$, а его остаток обозначим $r_n(x)$. Таким образом, в области сходимости имеем:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x), \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Чаще всего используют функциональные ряды двух типов: степенные и тригонометрические.

1. Степенные ряды — это ряды вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n. \quad (3.1)$$

Таким образом, степенной ряд является частным случаем функционального ряда, где $u_n(x)$ имеет вид:

$$a_n(x - x_0)^n.$$

Частичная сумма степенного ряда является многочленом. Поэтому вычисление ее значения сводится к арифметическим операциям над значениями аргументов, числом x_0 и коэффициентами ряда. При $x_0 = 0$ степенной ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3.2)$$

Из произвольного степенного ряда можно получить ряд типа (3.2), сделав замену $x - x_0 = t$. Поэтому ясно, что если ряд (3.2) сходится в области X , то ряд (3.1) сходится в области вида:

$$\{x \mid x - x_0 \in X\}.$$

2. Тригонометрические ряды — это функциональные ряды вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)^1, \quad (3.3)$$

где $l, a_0, a_n, b_n (n \in \mathbf{N})$ — постоянные числа, причем $l > 0$. При $l = \pi$ получаем тригонометрический ряд в форме

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (3.4)$$

Из общего тригонометрического ряда с помощью замены $\frac{\pi x}{l} = t$ получаем ряд вида (3.4). Отсюда следует, что если X — область сходимости ряда (3.4), то ряд (3.3) сходится в области

$$Y = \left\{ x \mid \frac{\pi x}{l} \in X \right\}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается функциональный ряд от числового ряда?
2. Пусть X_n — область определения $u_n(x)$, на каком множестве имеет

смысл ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$?

3. Требуют ли выписанные ниже формулы

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x), \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

специального доказательства?

4. Как связаны суммы рядов (3.1) и (3.2), а также (3.3) и (3.4)?

§ 4. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Представление функции f в виде суммы ряда вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ называется *разложением этой функции в степенной ряд*. Для разложения функций в степенные ряды применяется формула Тейлора, которую мы сейчас докажем.

Т е о р е м а 4.1. Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно,

¹ Запись $\frac{a_0}{2}$ вместо a_0 не играет, конечно, принципиальной роли, она вызвана соображениями удобства и будет объяснена в главе V.

причем $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на этом отрезке. Тогда для любого x из этого отрезка выполняется равенство

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \quad (4.1)$$

где

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt. \quad (4.2)$$

Равенство (4.1) называют *формулой Тейлора*, $r_n(x)$ — *остаточным членом* этой формулы, а выражение (4.2) — *интегральной формой* остаточного члена формулы Тейлора. Отметим, что из существования на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ производных функции f до n -го порядка включительно вытекает непрерывность функций $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ на этом отрезке.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из формулы Ньютона — Лейбница следует, что $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$, и потому

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt. \quad (4.3)$$

Поскольку переменной интегрирования является t , мы считаем значение x постоянным. Но тогда $dt = -d(x - t)$. Интегрируя по частям в формуле (4.3) и полагая $u = f'(t)$, $dv = dt = -d(x - t)$, получаем:

$$f(x) = f(x_0) - f'(t)(x - t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x f''(x)(x - t) dt.$$

Но при $t = x$ выражение $x - t$ обращается в нуль, и потому

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt.$$

Полученное выражение совпадает с (4.1), (4.2) при $n = 1$. Предположим теперь, что равенства (4.1), (4.2) доказаны при $n = k$, т. е. что доказано соотношение

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x f^{(k+1)}(t)(x - t)^k dt.$$

Предполагая существование и непрерывность $f^{(k+2)}(x)$, положим

$$f^{(k+1)}(t) = u, \quad (x-t)^k dt = dv. \quad \text{Так как}$$

$$du = f^{(k+2)}(t) dt,$$

$$v = \int (x-t)^k dt = - \int (x-t)^k d(x-t) = - \frac{(x-t)^{k+1}}{k+1},$$

то получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k - \\ &- \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} \Big|_{x_0}^x + \frac{1}{(k+1)!} \int_{x_0}^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1} dt = f(x_0) + \\ &+ f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1} + \\ &+ \frac{1}{(k+1)!} \int_{x_0}^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Это и значит, что равенства (4.1), (4.2) верны при $n = k + 1$.

Поскольку равенства (4.1), (4.2) верны при $n = 1$ и из их справедливости при $n = k$ следует, что они верны при $n = k + 1$, то они верны для всех n . Формулы (4.1), (4.2) доказаны.

Пример 4.1. Применим к функции $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ формулу Тейлора при $x_0 = 1$ и $n = 2, 3, 4$ и вычислим $f(1, 01)$ с точностью до 10^{-6} .

Решение. Вычислим производные функции $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 16x + 4,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 16,$$

$$f'''(x) = 24x + 12,$$

$$f^{(IV)}(x) = 24,$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ при } n \geq 5.$$

В точке $x_0 = 1$ имеем:

$$f(1) = 3, \quad f'(1) = -2, \quad f''(1) = 8, \quad f'''(1) = 36, \quad f^{(IV)}(1) = 24.$$

При $n = 2$ получим:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 - 2(x-1) + \frac{8}{1 \cdot 2} (x-1)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \int_1^x (24t + 12)(x-t)^2 dt = \\ &= 3 - 2(x-1) + 4(x-1)^2 + 6 \int_1^x (2t+1)(x-t)^2 dt. \end{aligned}$$

При $n = 3$

$$f(x) = 3 - 2(x-1) + \frac{8}{1 \cdot 2} (x-1)^2 + \frac{36}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x-1)^3 +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int_1^x 24 (x-t)^3 dt = 3 - 2(x-1) + 4(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + \\ + 4 \int_1^x (x-t)^3 dt.$$

При $n \geq 4$ получаем разложение функции $f(x)$ по степеням $(x-1)$, поскольку $r_n(x)$ тождественно обращается в нуль:

$$f(x) = 3 - 2(x-1) + \frac{8}{1 \cdot 2}(x-1)^2 + \frac{36}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-1)^3 + \\ + \frac{24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x-1)^4 = 3 - 2(x-1) + 4(x-1)^2 + 6(x-1)^3 + \\ + (x-1)^4.$$

Легко непосредственно проверить, что

$$r_2(x) = 6 \int_1^x (2t+1)(x-t)^2 dt = 6(x-1)^3 + (x-1)^4;$$

$$r_3(x) = 4 \int_1^x (x-t)^3 dt = (x-1)^4.$$

Последнее слагаемое в разложении $f(x)$ при $x = 1,01$ равно 10^{-8} . Предыдущее слагаемое при $x = 1,01$ равно $6 \cdot 10^{-6}$. Для вычисления с точностью 10^{-6} можно отбросить лишь последнее слагаемое. Имеем:

$f(1,01) \approx 3 - 2 \cdot 0,01 + 4 \cdot 0,0001 + 6 \cdot 0,000001 = 2,980406$ с точностью до 10^{-6} . В данном примере мы фактически знаем больше: истинное значение $f(1,01)$ превышает найденное на 10^{-8} (на величину отброшенного члена).

З а м е ч а н и е. Использование формулы Тейлора для многочлена k -й степени при $n = k$ дает разложение многочлена по степеням $x - x_0$, так как $r_n(x) = 0$ в силу того, что $f^{(k+1)}(x) = 0$.

П р и м е р 4.2. Напишем формулу Тейлора при $n = 4$ и выражение остаточного члена для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ при $x_0 = 0$.

Дадим оценку $|r_4(x)|$ на отрезке $[0; 1]$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, f'''(x) = \\ = -\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}}, f^{(IV)}(x) = \frac{105}{16}(1+x)^{-\frac{9}{2}},$$

$$f^{(V)}(x) = -\frac{945}{32}(1+x)^{-\frac{11}{2}}.$$

Отсюда:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}, \quad f''(0) = \frac{3}{4}, \quad f'''(0) = -\frac{15}{8}, \quad f^{(IV)}(0) = \frac{105}{16}.$$

Искомая формула имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{15}{8}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{105}{16}x^4 + r_4(x),$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + r_4(x),$$

где

$$\begin{aligned} r_4(x) &= -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \int_0^x \frac{945}{32} (1+t)^{-\frac{11}{2}} (x-t)^4 dt = \\ &= -\frac{315}{256} \int_0^x (1+t)^{-\frac{11}{2}} (x-t)^4 dt. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция положительна и, кроме того, $(1+t)^{-\frac{11}{2}} \leq 1$ (так как $0 \leq t \leq x \leq 1$). Следовательно,

$$|r_4(x)| \leq \frac{315}{256} \int_0^x (x-t)^4 dt = \frac{315}{256} \left(-\frac{(x-t)^5}{5} \right) \Big|_0^x = \frac{63}{256} x^5.$$

Таким образом, вычисление функции $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ на отрезке $[0; 1]$ по приближенной формуле

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4$$

дает ее значение с избытком и ошибка не превышает величины $\frac{63}{256}x^5$.

Пример 4.3. Найдем четвертый коэффициент в формуле Тейлора функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ при $x_0 = -\frac{1}{2}$ и дадим оценку остаточного члена $r_4(x)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Решение. Как мы видели (см. пример 4.2), $f^{(IV)}(x) = \frac{105}{16}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$.

Отсюда $f^{(IV)}(x_0) = \frac{105}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{9}{2}} = 105\sqrt{2}$ и четвертый коэффициент

в формуле Тейлора равен:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{(IV)}(x_0) = \frac{35\sqrt{2}}{8}.$$

Для $r_4(x)$ имеет место выражение

$$r_4(x) = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{945}{32} \int_{-\frac{1}{2}}^x (1+t)^{-\frac{11}{2}} (x-t)^4 dt$$

(ср. с примером 4.2). Функция $(1+t)^{-\frac{11}{2}}$ монотонно убывает на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; x\right]$ и достигает наибольшего значения при $t = -\frac{1}{2}$, т. е.

$$(1+t)^{-\frac{11}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{11}{2}} = 32\sqrt{2}.$$

Следовательно, имеет место оценка

$$0 \leq (1+t)^{-\frac{11}{2}} (x-t)^4 \leq 32\sqrt{2} (x-t)^4,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |r_4(x)| &\leq \frac{945 \cdot 32\sqrt{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 32} \int_{-\frac{1}{2}}^x (x-t)^4 dt = \frac{315\sqrt{2}}{8} \left(-\frac{(x-t)^5}{5} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^x = \\ &= \frac{63\sqrt{2}}{8} \left(x + \frac{1}{2} \right)^5. \end{aligned}$$

Пример 4.4. Выясним, при каком наибольшем значении n можно записать формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для функции $f(x) = x^{\frac{13}{3}}$ при $x_0 = 0$, и найдем соответствующую формулу Тейлора.

Решение. В точке $x_0 = 0$ функция имеет производные до 4-го порядка включительно, и все эти производные равны нулю. Производные более высоких порядков в точке $x_0 = 0$ не существуют. Так как значение функции $f(x)$ в точке x_0 также равно нулю, то искомая формула Тейлора принимает вид $f(x) = r_3(x)$.

Пример 4.5. Выясним происхождение формулы

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

и укажем тот промежуток значений x , на котором эта приближенная формула имеет место с точностью до 0,00005.

Решение. Поскольку записанная формула представляет

собой разложение по степеням x , найдем для сравнения с ней формулу Тейлора для функции $f(x) = \cos x$ при $x_0 = 0$ и $n \geq 4$.

Имеем:

$$f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x; \quad f'''(x) = \sin x; \\ f^{(IV)}(x) = \cos x; \quad f^{(V)}(x) = -\sin x; \quad f^{(VI)}(x) = -\cos x.$$

Отсюда:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 0; \quad f^{(IV)}(0) = 1; \\ f^{(V)}(0) = 0; \quad f^{(VI)}(0) = -1.$$

Таким образом, часть формулы Тейлора без остаточного члена и при $n = 4$ и при $n = 5$ совпадает с исходной формулой. Мы примем $n = 5$, так как при этом получается лучшая оценка остаточного члена. Итак,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + r_5(x),$$

где

$$r_5(x) = -\frac{1}{5!} \int_0^x \cos t (x-t)^5 dt.$$

Таким образом, абсолютная погрешность записанной в условии задачи формулы следует из оценки $|r_5(x)|$. Так как $|\cos t| \leq 1$, то получим:

$$|r_5(x)| \leq \frac{1}{120} \left| \int_0^x |\cos t| |x-t|^5 dt \right| \leq \\ \leq \frac{1}{120} \left| \int_0^x (x-t)^5 dt \right| = \frac{1}{120} \left| -\frac{(x-t)^6}{6} \Big|_0^x \right| = \frac{1}{720} |x|^6.$$

Чтобы абсолютная погрешность была меньше 0,00005, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\frac{|x|^6}{720} < 0,00005.$$

Решая это неравенство, получим $|x| < 0,57$, т. е. указанная точность приближения обеспечивается значениями, удовлетворяющими неравенству

$$-0,57 < x < 0,57.$$

З а м е ч а н и е. Так как использованная нами оценка остаточного члена дана «с запасом», то мы получили не наибольший промежуток, в котором обеспечивается требуемая точность нашей приближенной формулы для $\cos x$. Эта точность может быть достигнута и в несколько более широком промежутке.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой из методов интегрирования используется для вывода формулы Тейлора?

2. Какую роль играет метод полной математической индукции при выводе формулы Тейлора?

3. Как разложить многочлен n -й степени по степеням $x - x_0$?

4. Пусть на промежутке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до 10-го порядка включительно. С каким максимальным числом членов заведомо можно записать формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме?

5. На чем основана оценка остаточного члена в примерах 4.2, 4.3, 4.5?

6. На каком основании при оценке $|r_5(x)|$ в примере 4.5 $|x - t|$ заменен на $(x - t)$, ведь допускались и отрицательные значения x ?

Упражнения

15. С помощью формулы Тейлора разложите следующие многочлены:

а) $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$,

б) $x^3 - 2x + 1$ по степеням двучлена $x - 1$,

в) x^6 по степеням двучлена $x + 2$.

16. Запишите формулу Тейлора для функции $f(x) = (x + 1)^{\frac{4}{3}}$ в точке $x_0 = 0$ при $n = 3$. Оцените погрешность, получаемую при отбрасывании остаточного члена $r_3(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

17. Напишите несколько первых членов в формуле Тейлора для функции $f(x) = \ln(1 + 2x)$ при $x_0 = 0$. Оцените погрешность, получаемую при отбрасывании остаточного члена в формуле Тейлора после пяти первых членов на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

18. Разложите функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням двучлена $x - 4$, ограничившись четырьмя членами. Какие значения x допустимы? Какой максимальный промежуток допустим при разложении по формуле Тейлора при $x_0 = 4$?

19. Разложите функцию $f(x) = \sin^2 x$ по степеням x . Оцените $r_{10}(x)$ на $[0; 1]$.

20. Выясните происхождение приближенного равенства $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оцените погрешность для $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

21. Определите значения x , для которых приближенное равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ выполняется с точностью до 0,0001.

22. Вычислите значение $\operatorname{tg} 46^\circ$, взяв три первых члена разложения функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора при $x_0 = 0$ и при $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Результаты сравните с табличным значением.

23. Вычислите значение $\cos 32^\circ$ с точностью до 0,0001, пользуясь разложением функции $f(x) = \cos x$ по формуле Тейлора при $x_0 = \frac{\pi}{6}$ и при $x_0 = 0$. Какое значение n достаточно взять в том и в другом случае?

24. С помощью формулы Тейлора напишите разложение функции $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt{1 - 3x + x^2}$ по степеням x до члена x^3 включительно.

25. Оцените абсолютную погрешность приближенной формулы $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ на отрезке $[0; 1]$.

26. Разложите функцию $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x - 2$. Вычислите приближенное значение $f(2,1)$, взяв первые три члена разложения. Вычислите точное значение $f(2, 1)$. Найдите абсолютную и относительную погрешности, допущенные при приближенном вычислении $f(2, 1)$.

27. Укажите промежутки значений x , при которых приближенная формула

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{1}{3} x^4$$

имеет место с точностью до 0,01.

28. Сколько нужно взять членов в формуле Тейлора для функции $f(x) = \cos x$, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию с точностью 0,0001 на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

1. Ряд Тейлора. Формула (4.1) дает представление функции f в виде суммы конечного множества слагаемых. Если функция f имеет на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ производные любого порядка, причем на этом отрезке выполняется соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, то можно перейти в формуле Тейлора к пределу при $n \rightarrow \infty$. Мы получим, что

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n),$$

т. е. что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (5.1)$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (5.1), называется *рядом Тейлора* функции f . Он зависит не только от этой функции, но и от выбора значения x_0 . Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора принимает вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (5.2)$$

Непосредственно проверить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ для всех x из отрезка $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, иногда бывает затруднительно. Поэтому нужно вывести признак того, что на нем выполняется равенство (5.1), т. е. что функция равна на нем сумме своего ряда Тейлора. Сначала докажем следующую лемму:

Л е м м а 5.1. Пусть последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из положительных чисел и пусть существует такое число q , что $0 < q < 1$ и для всех n выполняется неравенство $a_{n+1} < < a_n q$. Тогда для всех $n > 2$ имеем $a_n < a_1 q^{n-1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы выполняется неравенство $a_2 < a_1 q$. Предположим теперь, что доказано неравен-

ство $a_k < a_1 q^{k-1}$. Тогда по условию леммы $a_{k+1} < a_k q$, и потому

$$a_{k+1} < a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k = a_1 q^{(k+1)-1}.$$

Итак, неравенство $a_n < a_1 q^{n-1}$ выполняется при $n = 2$ и из его выполнения при $n = k$ следует, что оно выполняется и при $n = k + 1$. Значит, это неравенство верно для всех $n \geq 2$.

Поскольку $0 < q < 1$, то из неравенств $0 < a_n < a_1 q^{n-1}$ следует, что

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0,$$

и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Утверждение, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, остается справедливым и в случае, когда неравенство $a_{n+1} < a_n q$ выполняется не для всех n , а лишь начиная с некоторого значения N . В самом деле, если от последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ отбросить первые N членов, то ее предел не изменится.

Пример 5.1. Докажем, что для любого x выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

В самом деле, имеем:

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x^n}{n!} \right| \cdot \left| \frac{x}{n+1} \right|.$$

Но если $n > 2|x|$, то $\left| \frac{x}{n+1} \right| < \frac{1}{2}$. Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0, \text{ а тогда и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Признак сходимости ряда Тейлора к разлагаемой функции формулируется следующим образом:

Теорема 5.1. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ и пусть существует такое число M , что для всех x из этого отрезка и всех n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Тогда функция f является на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ суммой своего ряда Тейлора.

Иными словами, в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ для всех

$x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$.

Доказательство. Для любого $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ и любого n выполняется равенство

$$|r_n(x)| = \frac{1}{n!} \left| \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \right|.$$

Но по условию теоремы имеем $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Поэтому

$$|r_n(x)| \leq \frac{M}{n!} \left| \int_{x_0}^x (x-t)^n dt \right| = \frac{M}{n!(n+1)} |(x-t)^{n+1}|_{x_0}^x = \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Как было показано в примере 5.1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = 0$, следовательно, для любого $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$, а это и значит, что функция f является на $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ суммой своего ряда Тейлора.

Пример 5.2. Найдем ряд Тейлора ($x_0 = 0$) для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего необходимо доказать существование всех производных функции $f(x)$ при $x = 0$ и вычислить эти производные. Напомним, что при любом m

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^m}{e^t} = 0.$$

При $m \leq 0$ это очевидно, а для $m > 0$ результат устанавливается с помощью правила Лопиталья. Если m — натуральное число, то, применяя правило Лопиталья m раз, получим:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^m}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \dots \cdot 1}{e^t} = 0.$$

Если $m > 0$ не является целым числом, то правило Лопиталья нужно применить k раз, где $k = [m] + 1$. В этом случае имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^m}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m(m-1) \dots \cdot (m-k+1) t^{m-k}}{e^t} = 0,$$

так как $m - k < 0$.

Найдем $f'(0)$. Имеем:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Если заменить $\frac{1}{x^2}$ на t , то получим $\frac{1}{x} = \sqrt{t}$ ($x > 0$), а потому при $x \rightarrow +0$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0.$$

Точно так же

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{e^{x^2}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{t}}{e^t} = 0.$$

Следовательно, $f'(0) = 0$.

С помощью метода математической индукции можно доказать, что при любом $n \in N$ имеем $f^{(n)}(0) = 0$. Значит, все члены ряда Тейлора равны нулю, и потому он сходится к функции, тождественно равной нулю, а не к $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Этот пример показывает, что даже в случае, когда функция f имеет производные любого порядка в точке x_0 , сумма ее ряда Тейлора в окрестности этой точки может совпадать с $f(x)$ лишь при $x = x_0$.

В некоторых случаях разложение функции в степенной ряд легче получить не опираясь на теорему о ряде Тейлора.

2. Разложение функции $y = \ln(1+x)$. Прежде всего заметим, что при $t \neq 1$ выполняется равенство

$$1 - t + t^2 + \dots + (-t)^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 + t},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-t)^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t}.$$

Проинтегрируем это равенство от 0 до x , где $-1 < x \leq 1$ (заметим, что справа у нас конечная сумма). Мы получим, что

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t dt + \int_0^x t^2 dt - \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t}. \end{aligned}$$

Так как $-1 < x \leq 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $x \geq -1 + \varepsilon$. Тогда на отрезке $[0; x]$ выполняется неравенство $1+t \geq 1 + (-1 + \varepsilon) = \varepsilon$, следовательно,

$$\left| \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^x t^n dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{\varepsilon(n+1)}.$$

Поскольку $|x| \leq 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = 0$, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t^2} \right| = 0. \quad (5.3)$$

Мы доказали, таким образом, что для любого x из промежутка $] -1; 1]$ выполняется равенство (5.3).

Следовательно, при $x \in] -1; 1]$ имеем:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (5.4)$$

3. Разложение функции $y = \operatorname{arctg} x$. Из того, что

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$$

и $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$, получаем разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad (5.5)$$

где $x \in [-1; 1]$ (предоставляем читателю показать, что если $-1 \leq x \leq 1$, то

$$\left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|$$

и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2} \right| = 0).$$

В других случаях нужно использовать общую формулу Тейлора.

4. Разложение в степенной ряд функции $y = e^x$. На отрезке $[-R; R]$ имеем $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^R$, поскольку функция $y = e^x$ монотонно возрастает. Поэтому функцию $y = e^x$ можно разложить в ряд Тейлора вида (5.2) на любом отрезке $[-R; R]$. Поскольку для любого x найдется такое R , что $x \in [-R; R]$, то функция $y = e^x$ равна сумме своего ряда Тейлора на всей числовой прямой.

Чтобы найти этот ряд, заметим, что для любого n имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, и потому $f^{(n)}(0) = e^{(0)} = 1$. Подставляя эти значения в формулу (5.2), находим, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (5.6)$$

5. Разложение в степенной ряд функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Так как любая производная функции $\sin x$ имеет вид $\pm \sin x$ или $\pm \cos x$, то для любого x и любого n выполняется неравенство

$|f^{(n)}(x)| \leq 1$. Поэтому функция $y = \sin x$ равна сумме своего ряда Тейлора на всей числовой прямой.

Чтобы найти этот ряд, заметим, что

$$f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

и потому

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Но значение $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$, если n четно ($n = 2k$) и равно $(-1)^k$, если $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Значит, ряд Тейлора для функции $\sin x$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \\ &+ \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Точно так же выводится, что

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad (5.8)$$

Отметим, что $\sin x$ (нечетная функция) разлагается по нечетным степеням x , а $\cos x$ (четная функция) — по четным степеням x .

6. Разложение функции $y = (1+x)^\alpha$, где $|x| < 1$ и α — любое число. Для этой функции имеем:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

В силу формулы (4.2) при $x_0 = 0$ получаем, что n -й остаточный член формулы Тейлора для $(1+x)^\alpha$ имеет вид:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt,$$

т. е.

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n) x^n}{n!} \int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n dt = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n) x^n}{n!} \int_0^x \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Так как $0 \leq t \leq x$ или $x \leq t \leq 0$, то $0 \leq \frac{t}{x} \leq 1$, и потому $1 - \frac{t}{x} \geq 0$. Кроме того, так как $|x| < 1$, то $0 \leq 1 - \frac{t}{x} <$

$$< 1 + t, \text{ а значит, } \left| \frac{1 - \frac{t}{x}}{1+t} \right| < 1.$$

Далее, так как $1 - |x| \leq 1 + t \leq 1 + |x|$ и $|x| < 1$, то $|1 + t|^{\alpha-1}$ не превосходит большего из чисел $(1 - |x|)^{\alpha-1}$ и $(1 + |x|)^{\alpha-1}$. Обозначим это число A . Тогда имеем для $r_n(x)$ оценку $|r_n(x)| \leq R_n(x)$, где

$$R_n(x) = \frac{|A\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)x^n|}{n!}.$$

Поэтому для доказательства сходимости ряда Тейлора функции $(1+x)^\alpha$ к этой функции при $x_0 = 0$ достаточно показать, что при $|x| < 1$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Отметим, что

$$\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} = \left| \frac{\alpha - n + 1}{n + 1} x \right| = \left| 1 - \frac{\alpha}{n + 1} \right| |x|.$$

Так как $|x| < 1$, то найдется такое q , что $|x| < q < 1$. При достаточно большом n имеем:

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{n + 1} \right| |x| < q < 1,$$

т. е.

$$\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} < q < 1.$$

Как было показано в лемме 5.1, отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ и тем более } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Это и показывает, что функция $(1+x)^\alpha$ при $|x| < 1$ равна сумме своего ряда Тейлора (при $x_0 = 0$). Поскольку

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1),$$

то этот ряд Тейлора имеет вид:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Отметим, что если $\alpha = m$ — натуральное число, то все члены разложения, для которых $n > m$, содержат разность $m - m$ и потому равны нулю. В этом случае имеем:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{m!} x^m. \quad (5.10)$$

Это формула *бинома Ньютона*.

Выведем разложение в степенной ряд функции $y = \sqrt{1+x}$.
Для этого достаточно положить в формуле (5.9) $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \\ &+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots + \\ &+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \dots\end{aligned}$$

Но при $n > 1$

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} x^n.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} x^n + \dots\end{aligned}\quad (5.11)$$

7. Разложение других элементарных функций. Мы доказали следующие разложения функции в степенные ряды:

$$\text{I. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in]-1; 1],$$

$$\text{II. } \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in [-1; 1],$$

$$\text{III. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in]-\infty; \infty[,$$

$$\text{IV. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in]-\infty; \infty[,$$

$$\text{V. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in]-\infty; \infty[,$$

$$\text{VI. } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in]-1; 1[.$$

С помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и формул I—VI можно разлагать различные элементарные функции.

Пример 5.3. Разложим по степеням $x - 5$ функцию $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Для этой цели воспользуемся формулой суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n, \quad |q| < 1.$$

Имеем:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5 + (x-5)} = \frac{1}{5 \left(1 + \frac{x-5}{5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} (x-5)^n.$$

Это разложение справедливо при условии $\left| \frac{x-5}{5} \right| < 1$. Решая неравенство, найдем:

$$\begin{aligned} |x-5| &< 5, \\ -5 &< x-5 < 5, \\ 0 &< x < 10. \end{aligned}$$

Итак, найденное разложение имеет место при $x \in]0; 10[$.

Пример 5.4. Разложим по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+x} -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

Множество, на котором справедливо разложение, определяется системой неравенств

$$\begin{cases} |x| < 1, \\ \left|\frac{x}{2}\right| < 1. \end{cases}$$

Решением этой системы является интервал $] -1; 1[$.

Пример 5.5. Разложим функцию $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$ по степеням $x + 2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 7} = \frac{1}{(x+2)^2 + 3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x+2)^2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}.$$

Разложение имеет место при $\frac{(x+2)^2}{3} < 1$. Решая это неравенство, получаем:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &< 3, \\ |x+2| &< \sqrt{3}, \\ -\sqrt{3} - 2 &< x < \sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

Разложение представляет функцию $f(x)$ на интервале $] -\sqrt{3}-2; \sqrt{3}-2[$.

Пример 5.6. Разложим функцию $f(x) = \ln x$ по степеням $x - 1$.

Решение. Функцию $f(x) = \ln x$ записываем в виде $\ln x = \ln(1 + (x-1))$. Используя формулу I, справедливую здесь при $-1 < x-1 \leq 1$, т. е. на промежутке $]0; 2]$, получаем:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{при } x \in]0; 2].$$

Пример 5.7. Разложим по степеням $x - 1$ функцию $f(x) = 3^x$. Записываем функцию $f(x) = 3^x$ в форме

$$3^x = 3 \cdot 3^{x-1} = 3(e^{\ln 3})^{x-1} = 3e^{(x-1)\ln 3}.$$

Используя формулу III, получаем:

$$e^x = 3e^{(x-1) \ln 3} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{n!} (x-1)^n.$$

Так как формула III справедлива при всех значениях аргумента и величина $(x-1) \ln 3$ также определена при любых x , то найденное разложение имеет место на множестве $]-\infty; \infty[$.

Пример 5.8. Разложим функцию $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ по степеням $x + 1$.

Представим рассматриваемую функцию в форме

$$e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{-1+x+1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x+1}{2}}$$

и снова воспользуемся формулой III. Имеем:

$$e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n!}, \quad x \in]-\infty; \infty[.$$

Пример 5.9. Разложим в ряд по степеням x функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Представляем $f(x)$ в форме $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, а затем используем формулу V.

Получаем:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + \right. \\ &+ \left. (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \frac{2^2 x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{2^4 x^4}{2 \cdot 4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{2 \cdot (2n)!} + \\ &+ \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

при $x \in]-\infty; \infty[$.

Пример 5.10. Разложим в степенной ряд по степеням $x - 4$ функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{4+x-4}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x-4}{4} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь воспользуемся формулой VI, где x заменяется на $\frac{x-4}{4}$,

а $\alpha = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \frac{(x-4)^n}{4^n} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{2n+1} \cdot n!} (x-4)^n,$$

где допустимые значения x определяются условием

$$\frac{|x-4|}{4} < 1.$$

Получаем: $0 < x < 8$, т. е. $x \in]0; 8[$.

Пример 5.11. Разложим в ряд по степеням x функцию $y = \arccos x$.

Воспользуемся соотношением

$$-\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t \Big|_0^x = \arccos x - \arccos 0 = \arccos x - \frac{\pi}{2}.$$

Откуда:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

К подынтегральной функции применим формулу VI. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} (-1)^n t^{2n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} t^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} t^{2n}, \end{aligned}$$

где $|-t^2| < 1$, а следовательно, $t \in]-1; 1[$.

Применяя найденное разложение, получаем:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} t^{2n} \right) dt.$$

Теперь применим необоснованный пока прием: интеграл от суммы ряда заменим рядом, составленным из интегралов от отдельных членов исходного функционального ряда (такая замена носит название почленного интегрирования функционального ряда и допустима для степенного ряда по любому отрезку, лежащему строго внутри интервала сходимости, см. гл. IV). Получаем:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in]-1; 1[.$$

Вопросы для самоконтроля

1. При каком условии можно записать ряд Тейлора функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$?
2. При каком условии справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n?$$

3. Где и каким образом в этом параграфе используется лемма 5.1?
4. Какая теорема интегрального исчисления используется при оценке $|r_n(x)|$ в доказательстве теоремы 5.1?
5. Всегда ли ряд Тейлора для функции f сходится к этой функции? Какая цель преследовалась при рассмотрении примера 5.2?
6. Что общего в проведенном в этом параграфе разложении в степенной ряд функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$?
7. Что объединяет приемы разложения в степенной ряд функций e^x , $\cos x$ и $\sin x$?
8. В чем различие проведенного разложения функции $(1+x)^\alpha$ от метода разложения функций e^x , $\cos x$ и $\sin x$?

9. В примере 5.4 для разложения функции $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ ее представляют в виде суммы простейших дробей. Затем каждую из простейших дробей раскладывают в ряд по степеням x и полученные ряды складывают. Какая теорема из § 2 при этом используется? Можно ли применить такой же прием при разложении по степеням x функции $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$?

10. Укажите множества аргументов, для которых имеют место полученные в этом параграфе стандартные разложения функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$.

Упражнения

29. Разложите функцию $y = \frac{1}{x-1}$ по степеням $x+1$.

30. Разложите функцию $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ по степеням $x+4$.

31. Разложите функцию $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ по степеням $x+1$.

32. Пользуясь формулами I—VI, разложите по степеням x следующие функции:

а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = \cos^2 x$; в) $y = \sin^3 x$; г) $y = \sin^6 x$;

д) $y = \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$; е) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

ж) $y = (1+x) \ln(1+x)$; з) $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

33. Функцию $y = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ разложите по степеням $x+1$.

34. Разложите функцию $y = \sqrt[3]{x}$ по степеням $x - 1$.

35. Функцию $y = e^{\frac{x}{2}}$ разложите по степеням $x - 1$.

36. Выведите формулу

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь тождеством

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} \sqrt{1+x} = \frac{x}{1+x} \left(1 - \frac{x}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

37. а) Выведите формулу

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^5 + \dots, \quad |x| < 1.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь тождеством при $|x| < 1$:

$$x = \frac{1+x^2}{2x} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^2} \right).$$

б) Чему равна сумма ряда:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^5 + \dots, \quad |x| > 1?$$

38. Разложите в ряд по степеням x функции

а) $y = \arcsin x$.

У к а з а н и е. См. решение примера 5.11.

б) $y = \arcsin x^3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили разложение некоторых функций в степенные ряды. Однако остались открытыми следующие вопросы:

1. Однозначно ли определено разложение этих функций в степенные ряды (т. е. нельзя ли найти другие степенные ряды, сходящиеся к тем же функциям)?

2. Можно ли почленно дифференцировать и интегрировать полученные ряды? Если бы это оказалось возможным, вывод многих формул заметно упростился бы (см. пример 5.11 и упражнение 38, а).

3. Какова оценка погрешности, образующейся при замене данного ряда какой-нибудь его частичной суммой? Получение ответа на этот вопрос необходимо для обеспечения возможности применения рядов при решении практических задач.

Чтобы ответить на эти и другие вопросы, касающиеся степенных рядов, надо глубже изучить свойства числовых рядов, вывести для них признаки сходимости, а потом снова вернуться к функциональным рядам.

ГЛАВА II

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 6. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Признаки сравнения. Начнем с изучения рядов, все члены которых неотрицательны.

Пусть дан ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где все $a_n \geq 0$. Так как $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ и $a_{n+1} \geq 0$, то $s_{n+1} \geq s_n$. Это значит, что последовательность $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ частичных сумм данного ряда неубывающая: $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$.

В курсе «Введение в анализ» доказывается, что для сходимости неубывающей последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху, т. е. необходимо и достаточно, чтобы существовало такое M , что $s_n \leq M$ для всех n . Значит, в этом и только в этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n \geq 0$, сходится.

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 6.1. *Для того чтобы ряд с неотрицательными членами сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.*

Если последовательность $\{s_n\}$ неубывающая, то ее предел не меньше любого из ее членов, т. е. для всех n выполняется неравенство $s_n \leq s$, где $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Доказанное утверждение позволяет установить следующий признак сходимости рядов с неотрицательными членами:

Теорема 6.2. *Пусть даны два ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, члены которых неотрицательны, причем для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда если сходится ряд (B), то сходится и ряд (A), причем $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (из сходимости ряда соответственно с большими членами вытекает сходимость ряда с соответственно меньшими членами).*

Доказательство. Обозначим частичные суммы ряда (A) через s_n , а ряда (B) — через σ_n . По предположению для всех n имеем $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$, т. е. $s_n \leq \sigma_n$.

Далее, так как ряд (B) сходится, а члены этого ряда неотрицательны, то для всех n имеем $\sigma_n \leq \sigma$, где σ — сумма этого ряда. Но тогда для всех n имеем $s_n \leq \sigma_n \leq \sigma$. Это значит, что частичные суммы s_n ряда (A) ограничены сверху числом σ , а поскольку члены этого ряда неотрицательны, он по теореме 6.1. сходится.

Обозначим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ через s . Из неравенства $s_n \leq \sigma_n$, $n \in N$, вытекает, что $s \leq \sigma$ (это вполне естественно — если для всех n имеем $a_n \leq b_n$, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$).

С л е д с т в и е. Если члены рядов (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ неотрицательны и для всех n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из расходимости ряда (A) вытекает, что и ряд (B) расходится.

В самом деле, если бы ряд (B) сходился, то по доказанной выше теореме сходился бы и ряд (A) вопреки предположению.

Пример 6.1. Выше (см. пример 1.5) было доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Но при любом n имеет место неравенство $(n+1)^2 \geq n(n+1)$, т. е. $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ тоже сходится.

Пример 6.2. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходится, а при любом n имеем $\frac{1}{\sqrt[n-1]{n-2}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n-1]{n-2}}$ тоже расходится.

З а м е ч а н и е. Так как сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка, то члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ можно сравнивать и лишь начиная с некоторого места (однако если $a_n \leq b_n$ лишь при $n \geq n_0$, то, вообще говоря, неравенство $s < \sigma$ может не иметь места).

Иногда удобнее применять другую теорему сравнения рядов с неотрицательными членами.

Т е о р е м а 6.3 (вторая теорема сравнения рядов с неотрицательными членами). Пусть все члены рядов (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

неотрицательны и пусть существует предел $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Тогда при $k \neq 0$ оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Если же $k = 0$, то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) — расходимость ряда (B).

Доказательство. Пусть $k \neq 0$. Выберем такую окрестность $]k - \varepsilon; k + \varepsilon[$, что $k - \varepsilon > 0$ (рис. 1). Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то, начиная с некоторого значения $n = n_0$, все $\frac{a_n}{b_n}$ окажутся в этой окрестности, а тогда для всех $n \geq n_0$ будут выполняться неравенства $\alpha b_n \leq a_n \leq \beta b_n$, где $\alpha = k - \varepsilon$, $\beta = k + \varepsilon$. Но тогда из сходимости ряда (A) следует сходимость ряда α (B), а тем самым и ряда (B). Из сходимости же ряда (B) следует сходимость ряда β (B), а тогда сходится и ряд (A). Значит, сходимость одного из рядов (A), (B) влечет за собой сходимость другого ряда.

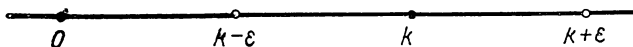


Рис. 1

Если же $k = 0$, то аналогичные рассуждения показывают существование такого n_0 , что при $n \geq n_0$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Но тогда сходимость ряда (B) влечет за собой сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B). Теорема доказана.

Пример 6.3. Мы знаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Так

как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ сходится.

2. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Чаще всего сравнивают ряды с суммами бесконечных убывающих прогрессий. Имеет место следующая теорема:

Теорема 6.4 (признак Даламбера). Пусть все члены ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и пусть существует предел отношения последующего члена ряда к предыдущему: $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Тогда:

если $D < 1$, то ряд сходится,

если $D > 1$, то ряд расходится,

если $D = 1$, то возможны как сходимость, так и расходимость ряда.

Доказательство. Пусть $D < 1$. Выберем такое q , что $D < q < 1$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то, начиная с некоторого номера n_0 , будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Но тогда при $n \geq n_0$ имеем $a_{n+1} < a_n q$ и потому $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k = a_{n_0} q^{-n_0} q^{n_0+k}$ (см. лемму 5.1). Таким образом, все члены заданного ряда, начиная с n_0 -го, не превосходят членов геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{\infty} b q^k$, $b = a_{n_0} q^{-n_0}$, которая сходится, поскольку $|q| < 1$.

Значит, по признаку сравнения сходится и заданный ряд.

Рассмотрим теперь случай, когда $D > 1$. В этом случае, начиная с некоторого значения n_0 , будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Это значит, что $a_{n+1} > a_n$, т. е. члены ряда не убывают, а потому не могут стремиться к нулю (напомним, что все $a_n > 0$). Поэтому ряд (A) расходится.

Покажем, наконец, что при $D = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Для этого заметим, что при любом значении α имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1.$$

Поэтому для любого ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ выполнено равенство $D = 1$.

Но при $\alpha < 1$ этот ряд расходится, а при $\alpha = 2$ сходится.

Пример 6.4. Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. Для этого ряда имеем $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Значит,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Так как $D = 0 < 1$, то ряд сходится.

Другим признаком сходимости рядов с положительными членами, основанным на сравнении с суммой геометрической прогрессии, является так называемый *радикальный признак сходимости Коши*.

Теорема 6.5. Пусть все члены ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положи-

тельны и пусть существует предел $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тогда:

- а) если $C < 1$, то ряд сходится;
- б) если $C > 1$, то ряд расходится;
- в) если $C = 1$, то возможны как сходимость, так и расходимость ряда.

Доказательство. Пусть $C < 1$. Выберем число q такое, что $C < q < 1$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C$, то, начиная с не-

которого значения n_0 , будет выполняться неравенство $\sqrt[n]{a_n} < q$, т. е. $a_n < q^n$. Значит, начиная с некоторого номера n_0 , члены ряда (А) меньше, чем члены прогрессии со знаменателем q , причем $|q| < 1$. Так как сумма такой прогрессии — сходящийся ряд, то и заданный ряд сходится.

Если $C > 1$, то, начиная с некоторого номера n_0 , выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Из него следует, что $a_n > 1$, т. е. что члены ряда (А) не стремятся к нулю. Поэтому ряд (А) расходится.

Легко убедиться, что при любом α имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Поэтому для рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ всегда $C = 1$. Но такие ряды могут как сходиться, так и расходиться. Теорема доказана.

3. Интегральный признак сходимости Коши. Во многих случаях члены рассматриваемых рядов не только положительны, но и монотонно стремятся к нулю. Для таких рядов вопрос о сходимости часто решается путем сравнения ряда с несобственным интегралом.

Напомним, что по определению несобственный интеграл $\int_a^x f(t) dt$

сходится, если существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$, и равен в этом случае значению этого предела. Если функция $f(t)$ всюду имеет первообразную $F(t)$, то $\int_a^{\infty} f(t) dt = F(\infty) - F(a)$, где $F(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$.

Таким образом, в случае существования первообразной $F(t)$ для функции $f(t)$ исследование сходимости $\int_a^{\infty} f(t) dt$ эквивалентно исследованию предела $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$, при этом если предел существует и конечен, то интеграл сходится, а если предел равен $\pm\infty$ или не существует, то интеграл расходится.

Если несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(t) dt$ сходится, то для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к ∞ , имеем:

$$\int_a^{\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(t) dt.$$

В случае, когда $f(t) \geq 0$, для сходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(t) dt$ достаточно существования хотя бы одной последовательности $\{x_n\}$, такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(t) dt < \infty$. Это вытекает из того, что при $f(t) > 0$ функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ монотонно возрастает.

В частности, при $f(t) \geq 0$ сходимость интеграла $\int_1^{\infty} f(t) dt$ равносильна сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \dots \quad (6.1)$$

В самом деле, частичные суммы этого ряда имеют вид:

$$s_n = \int_1^2 f(t) dt + \dots + \int_n^{n+1} f(t) dt = \int_1^{n+1} f(t) dt,$$

а для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы существовал предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Сформулируем признак сходимости рядов с монотонно убывающими положительными членами.

Т е о р е м а 6.6 (интегральный признак Коши). Пусть функция $f(t)$ задана на луче $[1; \infty[$, непрерывна, положительна, монотонно убывает и стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$. Обозначим $f(n)$ через a_n . Тогда ряд (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том слу-

чае, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(t) dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция f монотонно убывает на отрезке $[k; k+1]$, то на этом отрезке выполняется неравенство $f(k) \geq f(t) \geq f(k+1)$, т. е. $a_k \geq f(t) \geq a_{k+1}$. Отсюда

следует, что

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq a_k.$$

Если сходится интеграл $\int_1^{\infty} f(t) dt$, то сходится и ряд (6.1), а тогда в силу признака сравнения рядов сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, получаемый из данного ряда отбрасыванием слагаемого a_1 . Значит, данный ряд сходится. При этом имеет место неравенство $s - a_1 \leq \leq \int_1^{\infty} f(t) dt$, где s сумма данного ряда. Обратно, пусть сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. По признаку сравнения сходится и ряд (6.1), т. е.

интеграл $\int_1^{\infty} f(t) dt$. При этом $\int_1^{\infty} f(t) dt \leq s$.

Мы доказали теорему, получив при этом следующее неравенство:

$$s - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(t) dt \leq s.$$

В случае сходимости ряда (A) эту формулу можно использовать и для его остатка $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Получаем:

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(t) dt \leq r_{n-1}, \quad (6.2)$$

где, напомним, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Пример 6.5. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ расходится при $0 < \alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ удовлетворяет условиям теоремы 6.6, причем $f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Таким образом, для исследования сходимости ряда достаточно рассмотреть предел первообразной $F(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

при $x \rightarrow \infty$. При $\alpha \neq 1$

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Если $0 < \alpha < 1$, то $\alpha - 1 < 0$, и потому $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.

В этом случае интеграл, а тем самым и ряд расходятся. Если же $\alpha > 1$, то $\alpha - 1 > 0$, и тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. В этом случае интеграл, а следовательно, и ряд сходятся. Наконец, при $\alpha = 1$ $F(x) = \ln(x)$, а так как $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, то интеграл, а следовательно, и ряд расходятся.

4. Примеры исследования рядов на сходимость. Рассмотрим дальнейшие примеры на все признаки сходимости.

Пример 6.6. Исследуем сходимость ряда:

$$\frac{1}{1+7} + \frac{1}{\sqrt{2}+7^2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+7^n} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+7^n}$.

Заметим, что

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+7^n} < \frac{1}{7^n}.$$

Но ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{7^n}$ сходится (это геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{7}$). По первой теореме сравнения заданный ряд сходится.

Пример 6.7. Исследуем сходимость ряда:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполняется, но ряд расходится. Действительно,

$$a_n = \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{1+n}.$$

Ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n+1}$ расходится (это гармонический ряд). Поэтому на основании первой теоремы сравнения и заданный ряд расходится.

З а м е ч а н и е. Мы использовали неравенство $n+1 > \ln(n+1)$. Для его доказательства рассмотрим функцию

$\varphi(x) = x + 1 - \ln(x + 1)$. Ее производная $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ больше нуля при положительных значениях x . Следовательно, на $[0; \infty[$ функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает, а так как $\varphi(0) = 1 > 0$, то она положительна на $[0; \infty[$. Полагая теперь $x = n$, имеем:

$$n + 1 - \ln(n + 1) > 0 \text{ и } n + 1 > \ln(n + 1).$$

Пр и м е р 6.8. Исследуем сходимость ряда:

$$\sin \frac{5}{1} + \sin \frac{5}{2} + \dots + \sin \frac{5}{n} + \dots$$

Р е ш е н и е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{5}{n} = 0$. Необходимое условие сходимости выполняется. Возьмем гармонический ряд (его общий член $b_n = \frac{1}{n}$) и рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sin \frac{5}{n}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Предел существует и отличен от нуля. Поскольку гармонический ряд расходится, то на основании второй теоремы сравнения заданный ряд также расходится.

Пр и м е р 6.9. Оценим остаток r_n ряда:

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n} + \dots$$

Р е ш е н и е. Все члены ряда:

$$r_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} + \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+2)} + \dots + \frac{1}{2^m \cdot m} + \dots,$$

начиная со второго, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} + \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)} + \dots + \frac{1}{2^m \cdot (n+1)} + \dots$$

Поэтому остаток r_n меньше суммы этой геометрической прогрессии, которую обозначим r'_n , т. е. $r_n < r'_n$,

$$r'_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)} + \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)} + \dots = \frac{\frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n \cdot (n+1)}.$$

Следовательно, $r_n < \frac{1}{2^n \cdot (n+1)}$. Если, например, взять вместо

суммы s данного ряда частичную сумму s_8 , то возникающая при этом погрешность $\delta = s - s_8 = r_8 < \frac{1}{2^8 \cdot 9}$ и, таким образом, будет допущена ошибка, меньшая, чем $\frac{1}{2304}$.

Пример 6.10. Исследуем сходимость ряда:

$$\frac{4}{1} + \frac{4^2}{1 \cdot 3} + \frac{4^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots + \frac{4^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} + \dots$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Общий член ряда

$$a_n = \frac{4^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}. \text{ Поэтому } a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}$$

$$\text{и } D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(2n+1)} = 0 < 1.$$

Ряд сходится. Заметим, что мы доказали также соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = 0$$

(общий член сходящегося ряда стремится к нулю).

Пример 6.11. Исследуем сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n \text{ при } x > 0.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, воспользуемся признаком Даламбера:

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = (n+1) \frac{x \left(\frac{x}{n+1}\right)^n}{(n+1) \left(\frac{x}{n}\right)^n} = x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e}.$$

При $0 < x < e$ имеем $D < 1$ и, следовательно, ряд сходится. При $x > e$ ряд расходится, так как $D > 1$. При $x = e$ имеем $D = 1$. Признак Даламбера формально не дает ответа на вопрос о сходимости ряда, но поскольку в рассматриваемом случае

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

а $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится к пределу e , монотонно возрастая, то $D_n > 1$. Это означает, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, и потому $a_{n+1} > a_n$ для

каждого n . Таким образом, необходимый признак сходимости нарушается и ряд расходится. Итак, заданный ряд сходится при $0 < x < e$ и расходится при $x \geq e$.

Пример 6.12. Исследуем сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^{3n}}{(10n+2)^{3n}}.$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \left(\frac{3n}{10n+2}\right)^{3n}$. Так как в рассматриваемом случае легко найти $\sqrt[n]{a_n}$, то воспользуемся признаком Коши:

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{10n+2}\right)^{3n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{10n+2}\right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{10 + \frac{2}{n}}\right)^3 = \left(\frac{3}{10}\right)^3 < 1. \end{aligned}$$

Значит, ряд сходится. Отсюда следует, что, в частности,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)^{3n}}{(10n+2)^{3n}} = 0.$$

Пример 6.13. Докажем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^5(n+1)}$

и оценим погрешность при замене суммы ряда суммой первых десяти членов.

Решение. Признаки Даламбера и Коши здесь не дают ответа на вопрос о сходимости ряда. Члены ряда положительные и монотонно убывают. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln^5(x+1)}$. При $x \geq 1$ она положительна и монотонно убывает. При $x = n$ ($n \in \mathbb{N}$) ее значения совпадают с соответствующими членами ряда. Согласно интегральному признаку Коши, данный ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^5(x+1)}.$$

Подстановка $t = \ln(x+1)$, $dt = \frac{dx}{x+1}$ показывает, что

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x+1) \ln^5(x+1)} = \int \frac{dt}{t^5} = \frac{t^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4t^4} = -\frac{1}{4 \ln^4(x+1)}.$$

Поскольку очевидно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, то интеграл, а следова-

тельно, и ряд сходятся. Для оценки остатка воспользуемся формулой (6.2)

$$r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \leq r_{n-1}.$$

Из нее следует, что

$$\int_{11}^{\infty} f(x) dx \leq r_{10} \leq \int_{10}^{\infty} f(x) dx.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{10}^{\infty} f(x) dx &= \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^5(x+1)} = - \frac{1}{4 \ln^4(x+1)} \Big|_{10}^{\infty} = \\ &= - \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^4(x+1)} + \frac{1}{4 \ln^4 11} = \frac{1}{4 \ln^4 11}. \end{aligned}$$

Точно так же получаем:

$$\int_{11}^{\infty} f(x) dx = \int_{11}^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^5(x+1)} = \frac{1}{4 \ln^4 12}.$$

По таблице логарифмов находим, что $0,0065 < r_{10} < 0,0075$.

Пример 6.14. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ следует взять, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до 0,002?

Решение. Оценим величину r_n . Имеем:

$$\begin{aligned} r_n = s - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots &< 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \\ &+ \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

то

$$r_n < \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} = \frac{n+1+1}{(n+1)!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)}.$$

Поэтому нам нужно выбрать такое значение n , чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} < 0,002.$$

Так как $\frac{1}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{(n+1)!n}$, то достаточно решить неравенство $\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!n} < 0,002$, т. е. неравенство $\frac{n+1}{(n+1)!n} < 0,002$ или, иначе, $\frac{1}{n!n} < 0,002$. Подбором находим $n = 5$.

Вопросы для самоконтроля

1. Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами ограничена сверху, то можно ли утверждать, что ряд сходится? Почему?

2. На с. 40 используется утверждение, что предел неубывающей последовательности не меньше любого ее члена. Почему это так?

3. Сформулируйте необходимые и достаточные условия сходимости ряда с неотрицательными членами.

4. Сформулируйте признаки сравнения положительных рядов.

5. Если для частичных сумм s_n и σ_n двух рядов (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (В): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с отрицательными членами для каждого номера n имеет место соотношение $s_n \leq \sigma_n$, то и для сумм этих рядов s и σ также справедливо соотношение $s \leq \sigma$. Почему это так? Какой смысл можно придать соотношению $s \leq \sigma$, если ряд (А) расходится или если ряд (В) расходится?

6. Члены числового ряда (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, начиная с тысячного, положительны и при $n \geq 10^3$ выполняется неравенство $a_n < \frac{1}{2^n}$. Что можно сказать о сходимости ряда (А)? Можно ли указать какое-либо соотношение между суммой ряда (А) и суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, равной 1?

7. На сравнении с каким рядом основывается доказательство признаков Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами рядов? Сформулируйте эти признаки.

8. На с. 44 указано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$. Как это доказать?

9. На основании какого признака исследуется сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Как называют этот ряд при $\alpha = 1$?

10. Для каких рядов можно применить интегральный признак Коши?

11. На с. 46 указано соотношение $s - a_1 \leq \int_1^{\infty} f(t) dt$. Почему оно справедливо?

12. Объясните, почему при $f(t) \geq 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(t) dt$,

где $x_n > a$ — любая последовательность, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. В каком доказательстве этого параграфа используется указанное равенство?

Упражнения

39. С помощью необходимого признака сходимости и теорем сравнения установите сходимость или расходимость нижеприведенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^5+3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2-1}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n}+10^n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{5^n}\right);$$

$$\text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^8 \frac{\pi}{\sqrt{n}}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^3-n+5}}; \quad \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

40. С помощью признаков Даламбера или Коши исследуйте сходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot n!}{n^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (n+4)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n^2+1}}{5^{n^2} \sqrt[3]{n}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n+1}}{n^n};$$

$$\text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}; \quad \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

41. Выясните, при каких положительных значениях x сходятся следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) x^n; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

42. Докажите справедливость следующих равенств:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n!} = 0; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \ (c > 0); \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

У к а з а н и е. Исследуйте с помощью признака Даламбера ряд с соответствующим общим членом и воспользуйтесь необходимым признаком сходимости; можно также использовать лемму 5.1 на с. 26.

43. С помощью интегрального признака Коши установите сходимость или

расходимость следующих рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \sqrt{\ln(n+1)}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}.$$

44. Установите сходимость или расходимость нижеприведенных рядов, выбрав для исследования в каждой задаче подходящий признак сходимости (расходимости) ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n;$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\text{(по определению полагают, что } 0! = 1); \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \dots \cdot n^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)};$$

$$\text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}; \quad \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1002 \cdot 1004 \cdot \dots \cdot (998+2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)};$$

$$\text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}; \quad \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \ln \ln(n+1)};$$

$$\text{м) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n)! \sqrt[n]{n}}; \quad \text{н) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right); \quad \text{о) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}} \right),$$

$a > 0$.

45. Определите, сколько членов каждого из нижеприведенных рядов нужно взять, чтобы получить значение суммы ряда с точностью до 0,0001:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n}.$$

46. Докажите, что если положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Покажите, что обратное утверждение неверно.

47. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)?$$

Приведите примеры.

§ 7. СВОЙСТВА РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Перестановка членов ряда с неотрицательными членами.

Многие свойства сходящихся рядов с положительными членами аналогичны свойствам конечных сумм. Например, сумма таких рядов не меняется при перестановке их членов. Пусть даны два ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Говорят, что эти два ряда получают друг из друга перестановкой членов, если существует такое взаимно-однозначное отображение φ множества N натуральных чисел на себя, что $b_n = a_{\varphi(n)}$ (если все члены ряда (A) различны, то это означает, что множества $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ совпадают).

Теорема 7.1. Если ряд (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то сходится и любой ряд, полученный из него перестановкой членов, причем сумма ряда не меняется при перестановке членов.

Доказательство. Пусть $b_n = a_{\varphi(n)}$. Возьмем частичную сумму $\sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ряда (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда:

$$b_1 = a_{\varphi(1)}, \quad b_2 = a_{\varphi(2)}, \quad \dots, \quad b_n = a_{\varphi(n)},$$

и потому

$$\sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \dots + a_{\varphi(n)}.$$

Обозначим через m наибольшее из натуральных чисел $\varphi(1), \dots, \varphi(n)$. Ясно, что

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^m a_{\varphi(k)} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m = s_m,$$

и потому $\sigma_n \leq s_m$. Но так как, по условию, ряд (A) с положительными членами сходится, то $s_m \leq s$, где s — сумма этого ряда. Поэтому для всех n имеем $\sigma_n \leq s$. Значит, частичные суммы ряда (B), имеющего положительные члены, ограничены сверху, и потому он сходится. При этом сумма σ этого ряда не превосходит сумму s исходного ряда.

Докажем теперь, что $s \leq \sigma$. Заметим, что ряд (A) получается, в свою очередь, из ряда (B) перестановкой членов, обратной перестановке $\varphi: a_n = b_{\varphi^{-1}(n)}$. Поэтому должно выполняться и неравенство $s \leq \sigma$. Но из $\sigma \leq s$ и $s \leq \sigma$ получаем, что $s = \sigma$.

2. Группировка членов и умножение рядов с неотрицательными членами. Другое свойство рядов с неотрицательными членами касается группировки слагаемых. Как было показано в § 2, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и ряд, полученный из него любой

группировкой слагаемых. Для рядов с неотрицательными членами справедливо и обратное утверждение:

Т е о р е м а 7.2. *Если члены ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны и ряд, полученный из него некоторой группировкой членов, сходится к сумме s, то данный ряд сходится и имеет ту же сумму s.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы видели в § 2, что частичные суммы ряда, полученного группировкой членов, имеют вид $s_{m_1}, s_{m_2}, \dots, s_{m_k}, \dots$, где s_n — частичные суммы данного ряда. По условию, существует $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{m_k} = s$, и потому все $s_{m_k} \leq s$. Но для любого n найдется такое k , что $n \leq m_k$, и потому $s_n \leq s_{m_k} \leq s$. Значит, последовательность частичных сумм ряда (A) ограничена сверху, и потому этот ряд сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{m_k} = s.$$

Следующее свойство касается умножения рядов. Для умножения двух конечных сумм $s_n = a_1 + \dots + a_n$ и $\sigma_n = b_1 + \dots + b_n$ достаточно умножить каждое слагаемое первой суммы на каждое слагаемое второй суммы и сложить результаты. Произведения слагаемых можно расположить в виде следующей таблицы:

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \dots & a_nb_n. \end{matrix}$$

Таким образом,

$$a_1b_1 + a_1b_2 + \dots + a_kb_p + \dots + a_nb_n = s_n\sigma_n. \tag{7.1}$$

При умножении аналогичным образом двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ получаем бесконечную таблицу:

$$\begin{matrix} \hline a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_nb_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_nb_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_nb_3 & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \hline a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \dots & a_nb_n & \dots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{matrix} \tag{7.2}$$

Числа, стоящие в этой таблице, можно складывать, например, последовательно суммируя числа каждого «уголка», т. е. следующей схеме:

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + \\ & + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \dots \end{aligned} \tag{7.3}$$

Возможны и иные схемы суммирования этих чисел. Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 7.3. Если ряды (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (В): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к s и σ соответственно, а их члены неотрицательны, то, суммируя в любом порядке числа таблицы (7.2), получаем сходящийся ряд, сумма которого равна произведению сумм данных рядов.

Кратко говоря, сходящиеся ряды с неотрицательными членами можно перемножить так же, как конечные суммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним сложение по схеме (7.3). Тогда n -я частичная сумма ряда (7.3) будет равна произведению n -х частичных сумм рядов (А) и (В), $S_n = s_n \sigma_n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $S = s\sigma$.

Таким образом, ряд, полученный группировкой членов ряда:

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_3 + \dots, \quad (7.4)$$

сходится и имеет сумму $s\sigma$. Тогда ту же сумму имеет и ряд (7.4).

Поскольку сумма ряда с положительными членами не зависит от порядка слагаемых, то ту же сумму $s\sigma$ имеет ряд, полученный при любом расположении слагаемых.

При умножении рядов часто применяют иные схемы группировки слагаемых. Например, если умножают друг на друга два степенных ряда (А): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и (В): $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, то группируют вместе слагаемые, имеющие одну и ту же степень:

$$(C): a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots + \\ + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0) x^n \dots \quad (7.5)$$

Полагая в (7.5) $x = 1$, получаем ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0), \quad (7.6)$$

который называют *произведением рядов* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ по Коши.

П р и м е р 7.1. Возведем в квадрат по Коши ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ и найдем сумму полученного ряда (напомним, $0! = 1$ по определению).

Р е ш е н и е. Применяя выражение (7.6), найдем:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 \cdot \frac{1}{n!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(n-2)!} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n-1)! 1!} + \frac{1}{n!} \cdot 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots \right)$$

$$+ \dots + n + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Из предыдущего (см. § 5) известно, что сумма исходного ряда равна e . Действительно, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x \in]-\infty; \infty[$), при $x = 1$ получаем указанный результат. Точно так же сумма квадрата данного ряда равна e^2 в соответствии с теоремой об умножении рядов.

Вопросы для самоконтроля

1. Изменится ли сумма сходящегося ряда, если в нем поменять местами конечное число членов ряда?

2. При доказательстве теоремы о перестановке членов положительного сходящегося ряда было показано, что частичная сумма ряда, полученного перестановкой членов, не превосходит суммы s исходного ряда. Отсюда был сделан вывод, что $\sigma \leq s$, где σ — сумма ряда, полученного перестановкой членов. Каким образом получено неравенство $\sigma \leq s$?

3. Какой особенностью обладает теорема о группировке членов положительных рядов по сравнению с общим случаем?

4. Дан сходящийся положительный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, каждый член которого представляет сумму конечного числа слагаемых:

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-2}+2} + \dots + a_{n_k}.$$

В каком случае в этом ряду можно опустить скобки?

Упражнения

48. Найдите произведения рядов по Коши. Сходятся ли полученные ряды? Чему равны суммы полученных рядов?

а) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right)^2$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$

У к а з а н и е. Используйте разложение $7^n = (2+5)^n$ по степеням 2 и 5.

49. Распространите теорему о перестановке членов на расходящиеся положительные ряды.

50. Сформулируйте и докажите теорему о группировке членов для положительных расходящихся рядов.

51. Что можно сказать относительно ряда (7.6), если хотя бы один из рядов

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ или $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ расходится? Может ли в этом случае ряд (7.6) сходиться?

§ 8. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

1. Теорема Лейбница. Перейдем теперь к изучению рядов с членами произвольного знака, или, как говорят, *знакопеременных рядов*. Сначала рассмотрим *знакопередающиеся ряды*, т. е. ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

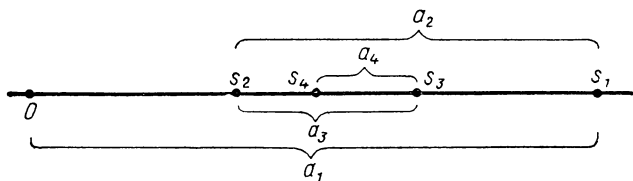


Рис. 2

у которых знаки соседних членов противоположны. Если положить $a_n = |b_n|$, то такой ряд записывается при $b_1 > 0$ следующим образом:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (8.1)$$

где все $a_n > 0$. Если же $b_1 < 0$, то знакочередующийся ряд имеет вид:

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots \quad (8.2)$$

Имеет место следующий *признак Лейбница* для сходимости знакочередующихся рядов:

Т е о р е м а 8.1 (Лейбница). Если модули членов знакочередующегося ряда монотонно убывают и стремятся к нулю, то этот ряд сходится. Модуль остатка такого ряда не превосходит модуля первого члена остатка ряда и имеет тот же знак, что этот член (иными словами, $|r_n| \leq |a_{n+1}|$ и $\text{sign } r_n = \text{sign } a_{n+1}$).

В частности, сумма ряда положительна, если $a_1 > 0$, и отрицательна, если $a_1 < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем для определенности считать, что $a_1 > 0$, т. е. что ряд имеет вид (8.1). Изобразим частичные суммы ряда (8.1) на числовой прямой (рис. 2). Из условия теоремы видно, что каждая следующая частичная сумма заключена между двумя предыдущими, а потому в системе отрезков

$$[0; s_1], [s_2; s_3], \dots, [s_{2n}; s_{2n+1}], \dots$$

каждый следующий содержится в предыдущем.

При этом $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$, и потому длины этих отрезков стремятся к нулю. Но тогда есть лишь одно число, принадлежащее этим отрезкам, причем отрезки стягиваются к этому числу s , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, т. е. что ряд сходится к числу s .

Одновременно мы доказали, что при любом n выполняются неравенства $s_{2n} \leq s \leq s_{2n+1}$ и $s_{2n+2} \leq s \leq s_{2n+1}$. Но тогда $0 \leq s - s_{2n} \leq a_{2n+1}$ и $-a_{2n+2} \leq s - s_{2n+1} \leq 0$, т. е. $0 \leq r_{2n} \leq a_{2n+1}$, $-a_{2n+2} \leq r_{2n+1} \leq 0$. Это значит, что для любого n имеем $|r_n| \leq |a_{n+1}|$, причем знаки r_n и a_{n+1} совпадают.

Случай, когда $a_1 < 0$, сводится к рассмотренному, если вынести минус за скобки.

Пример 8.1. Ряд:

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \dots$$

сходится при любом $\alpha > 0$, так как $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha}$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Пример 8.2. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? до 0,001?

Решение. Рассматриваемый ряд удовлетворяет условию теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится, а модуль разности суммы ряда s и частичной суммы s_n не превышает модуля первого отброшенного члена. Запишем последовательно значения $n!$, пока не превысим числа 1000:

$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040.$$

Следовательно, для вычисления суммы ряда с точностью до 0,01 достаточно вычислить s_4 , т. е. ограничиться суммой первых четырех членов. При этом знак погрешности совпадает со знаком $a_5 = -\frac{1}{120}$. Таким образом, s_4 дает приближенное значение суммы ряда с избытком, не превышающим $\frac{1}{120}$.

Точно так же для получения ответа с точностью до 0,001 можно ограничиться суммой первых шести членов ряда. При этом получаем приближенное значение с избытком, не превышающим $\frac{1}{5040}$.

Пример 8.3. Докажем, что знакочередующийся ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} + \dots$$

расходится, и выясним, почему здесь не применима теорема Лейбница о знакочередующихся рядах.

Решение. Четная частичная сумма s_{2k} может быть записана в виде:

$$s_{2k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} \right) = \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{k} =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right).$$

Таким образом, s_{2k} равна удвоенной частичной сумме номера k для гармонического ряда. Гармонический ряд, как известно, расходится. Следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \infty$. Необходимый признак сходимости для рассматриваемого ряда, очевидно, выполнен. В частности,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k+2}-1} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k} + a_{2k+1}) = \infty.$$

Итак, для рассматриваемого ряда предел частичных сумм равен ∞ — ряд расходится.

Теорема Лейбница здесь не применима, так как модуль общего члена стремится к нулю не монотонно. Действительно,

$$a_{2k} | - | a_{2k+1} | = \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{k+2}-1} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}-2}{(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+2}-1)} < 0,$$

поскольку, как легко проверить, $\sqrt{k+1}+2 > \sqrt{k+2}$.

Этот пример показывает, что монотонное стремление к нулю модуля общего члена знакопеременующегося ряда является существенным условием теоремы Лейбница.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой ряд называется знакопеременующимся рядом?
2. К каким знакопеременующимся рядам применима теорема Лейбница о знакопеременующихся рядах?
3. На какую теорему из «Введения в анализ» опирается доказательство теоремы Лейбница?
4. Общий член знакопеременующегося ряда не стремится к нулю. Что можно сказать об этом ряде (см. § 2)?
5. При приближенном вычислении суммы знакопеременующегося ряда, члены которого по абсолютной величине, монотонно убывая, стремятся к нулю, взято 11 первых членов ряда. Как оценить допущенную при этом погрешность?

Упражнения

52. В отношении каждого из нижеприведенных рядов докажите применимость теоремы Лейбница и укажите, сколько первых членов надо взять, чтобы найти сумму ряда с точностью до 0,001:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 5^n}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$$

53. Убедитесь, что признак Лейбница при исследовании каждого из нижеприведенных двух рядов неприменим. Выясните, действительно ли один из этих рядов сходится, а другой расходится. В сходящемся ряде вычислите значение суммы.

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 + (-1)^n 2}{n};$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{3^{2k-1}} + \dots$$

2. Абсолютно сходящиеся ряды. Перейдем теперь к изучению произвольных знакопеременных рядов. С каждым таким рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 8.2. Если сходится ряд (A^*) : $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд (A) : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Введем еще два ряда. Положим:

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{если } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad b_n = \begin{cases} |a_n|, & \text{если } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{если } a_n < 0 \end{cases}$$

и

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \geq 0, \\ -a_n, & \text{если } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \geq 0, \\ |a_n|, & \text{если } a_n < 0. \end{cases}$$

Ясно, что для любого n выполняются равенства $b_n - c_n = a_n$, $b_n + c_n = |a_n|$ и что для любого n имеем:

$$0 \leq b_n \leq |a_n| \quad \text{и} \quad 0 \leq c_n \leq |a_n|.$$

Так как члены рядов (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и (C): $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ неотрицательны и ряд (A^*) сходится, причем для всех n имеем $b_n \leq |a_n|$, $c_n \leq |a_n|$, то, по первому признаку сравнения, ряды (B) и (C) сходятся. Обозначим их суммы σ и S . Но тогда сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$, причем его сумма равна $\sigma - S$. Теорема доказана.

Отметим, что сумма ряда (A^*) равна $\sigma + S$.

Введем следующее определение.

Определение 8.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей его членов. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то первый ряд называют *условно сходящимся*.

Из теоремы 8.2 вытекает, что всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. При этом имеет место неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (8.3)$$

В самом деле, $\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq \sum_{n=1}^N |a_n|$. Отсюда в силу теоремы о модуле предела вытекает неравенство (8.3).

Такая же оценка верна и для остатков абсолютно сходящихся рядов:

$$|r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|.$$

Пример 8.4. Ряд:

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} + \dots \quad (8.4)$$

абсолютно сходится при $\alpha > 1$ и условно сходится при $0 < \alpha \leq 1$.

В самом деле, если $\alpha > 1$, то ряд

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots, \quad (8.5)$$

составленный из модулей членов ряда (8.4), сходится. Если же $0 < \alpha \leq 1$, то ряд (8.5) расходится, хотя сам ряд (8.4) сходится по признаку Лейбница (см. пример 8.1). Отметим, что при $\alpha \leq 0$ ряд (8.4) расходится, так как его члены не стремятся к нулю.

3. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов аналогичны доказанным выше свойствам рядов с неотрицательными членами. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 8.3. *Ряд, полученный из абсолютно сходящегося ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ перестановкой членов, также абсолютно сходится, причем имеет ту же сумму, что и сходящийся ряд.*

Теорема 8.4. *Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то абсолютно сходится и ряд, составленный из членов $a_k b_l$, $1 \leq k, l < \infty$, взятых в любом порядке. При этом сумма такого ряда равна произведению сумм данных рядов:*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} b_l.$$

Теорема 8.3 следует из того, что при перестановке членов ряда переставляются и члены рядов с неотрицательными членами, разностью которых является ряд (A) (см. доказательство теоремы 8.2). Поскольку при такой перестановке суммы этих рядов не меняются, то не меняется и сумма данного ряда. Для доказательства же теоремы 8.4 достаточно заметить, что поскольку сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$, то сходится и ряд $\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_k b_l|$, а потому ряд

$\sum_{k, l=1}^{\infty} a_k b_l$ абсолютно сходится. Но тогда его члены можно располагать в произвольном порядке. Так как $\sum_{k, l=1}^n a_k b_l = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{l=1}^n b_l$, то после перехода к пределу получаем, что

$$\sum_{k, l=1}^{\infty} a_k b_l = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_l.$$

Исследование абсолютной сходимости проводится теми же методами, с помощью которых исследуются ряды с неотрицательными членами. В частности, используются признаки Даламбера и Коши (радикальный), причем применяется следующее обозначение:

$$D_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ и } C_n^* = \sqrt[n]{|a_n|}. \text{ Если } D^* = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*$$

или $C^* = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^*$ меньше единицы, то ряд (A) сходится абсолютно, если больше единицы, то ряд (A*) расходится, а ряд (A) не является абсолютно сходящимся.

В общем случае из расходимости ряда (A*) не следует расходимость ряда (A) — он может сходиться условно. Однако если расходимость ряда (A*) установлена с помощью признаков Даламбера или Коши (D^* или C^* больше единицы), то это означает (см. доказательство этих признаков), что общий член ряда $|a_n|$ не стремится к нулю, т. е. и a_n не стремится к нулю, и для ряда (A) нарушается необходимый признак сходимости. Таким образом, из расходимости ряда (A*), установленной с помощью признаков Даламбера или Коши (радикального), следует расходимость ряда (A).

Пример 8.5. Исследуем сходимость ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Решение. Для ряда (A*), составленного из абсолютных величин рассматриваемого ряда, общий член $|a_n| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Применяем к ряду (A*) признак Даламбера

$$\begin{aligned} D_n^* &= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} : \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)^2 (n+1)^2}{(2n)! (2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{n+1}{4n+2}. \end{aligned}$$

$$D^* = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Ряд (A) сходится абсолютно.

Пример 8.6. Исследуем сходимость ряда (А):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Решение. Так же как и в предыдущем примере, находим:

$$\begin{aligned} D_n^* &= \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+2)!} : \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \\ &= \frac{4(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $|a_n|$ не стремится к нулю, но тогда не стремится к нулю и общий член ряда (А). Следовательно, ряд (А) расходится.

Пример 8.7. Исследуем сходимость ряда (А):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

Решение. Применяем признак Коши (радикальный). Имеем:

$$C_n^* = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n} = \frac{2n+1}{3n+1},$$

$$C^* = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд (А) сходится абсолютно.

Пример 8.8. Исследуем сходимость ряда (А):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

Решение. Так как последовательность $\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$ монотонно убывает и стремится к нулю, то данный знакочередующийся ряд сходится по теореме Лейбница. Чтобы выяснить, сходится ли он абсолютно или условно, образуем ряд (А*): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$.

Для этого ряда

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)} : \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} = 1,$$

и потому исследовать его сходимость по признаку Даламбера невозможно.

Применим к ряду (А*) интегральный признак сходимости. Имеем $a_n = f(n)$, где $f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)}$. Функция положи-

тельна, монотонно убывает и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Ее первообразная $F(x) = \ln \ln(x+1)$ стремится к ∞ при $x \rightarrow \infty$. Следовательно, ряд (A^*) расходится. Поэтому ряд (A) сходится условно.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему об абсолютной сходимости (теорему 8.2) и дайте определение абсолютной сходимости. Для ряда (A) :

$$5 + \frac{1}{3} + 0 - 4 - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + 2 + \frac{1}{3} - 1 + \dots$$

выпишите начальные члены рядов (B) и (C) из доказательства теоремы об абсолютной сходимости.

2. Если в абсолютно сходящемся ряде у произвольного числа членов изменить знаки на противоположные, то нарушится ли при этом абсолютная сходимость ряда? Почему?

3. В сходящемся знакопостоянном ряде у бесконечного множества членов изменили знаки на противоположные. Будет ли сходиться полученный таким образом ряд? Если да, то как (абсолютно, условно)?

4. Какую дополнительную информацию можно получить о поведении ряда (A) при исследовании ряда (A^*) с помощью признаков Даламбера и Коши (радикального) по сравнению с другими способами рассмотрения ряда (A^*) ?

Упражнения

54. Выясните, какие из данных знакопеременных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}; \quad г) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n}};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}; \quad е) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1};$$

$$ж) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)};$$

$$з) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)};$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n}; \quad к) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь оценкой $\sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$.

$$\text{л)} 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots,$$

$$\text{м)} 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots.$$

55. Пусть даны два ряда (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и (В): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными чле-

нами. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$, если:

- а) и ряд (А) и ряд (В) расходятся;
- б) ряд (А) расходится, а ряд (В) сходится;
- в) и ряд (А) и ряд (В) сходятся?

56. Докажите, что сумма двух абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд. Верно ли это же утверждение для разности абсолютно сходящихся рядов?

57. Докажите, что сходится произведение рядов

$$(A): \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \text{ и } (B) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n-2}},$$

и вычислите сумму полученного ряда.

4. Свойства условно сходящихся рядов. Для условно сходящихся рядов не имеют места ни теорема о перестановке членов, ни теорема об умножении рядов.

Пример 8.9. Ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots \quad (8.6)$$

сходится в силу признака Лейбница, причем его сумма положительна. Переставим его члены и сгруппируем их следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

Так как $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$ и т. д., то получим ряд:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \\ & = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right), \end{aligned}$$

сумма которого вдвое меньше суммы ряда (8.6). Таким образом, перестановка членов ряда (8.6) уменьшила его сумму вдвое.

Имеет место следующая теорема Римана:

Теорема 8.5. Если ряд (А): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то

путем перестановки его членов можно получить ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, а также расходящийся ряд.

Доказательство этой теоремы основано на следующем утверждении:

Если ряд $(A): \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $(B): \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $(C): \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ (см. доказательство теоремы 8.2), составленные соответственно из его положительных членов и модулей отрицательных членов, расходятся.

В самом деле, так как сходится ряд $(A) = (B) - (C)$, то при сходимости ряда (B) сходил бы и ряд $(C) = (B) - (A)$, а тогда сходил бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = (B) + (C)$ вопреки условию.

Пользуясь расходимостью рядов (B) и (C) , можно, поочередно беря слагаемые из этих рядов, получить сначала частичную сумму, которая больше выбранного числа s , а потом частичную сумму, которая меньше s , и т. д. Эти частичные суммы будут стремиться к s и, как можно показать, весь ряд будет сходиться к s . Детальное доказательство теоремы 8.5 мы опускаем.

Следующий пример показывает недопустимость умножения условно сходящихся рядов, производимого аналогично умножению конечных сумм.

Пример 8.10. Ряд:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

сходится условно. Рассмотрим квадрат этого ряда по Коши:

$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \\ & - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \\ & + (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k}} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (8.6)$$

Как нетрудно проверить,

$$(k+1)(n-k) = \frac{(n+1)^2}{4} - \left(\frac{n-1}{2} - k \right)^2 \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

и, таким образом,

$$\sqrt{k+1} \sqrt{n-k} = \sqrt{(k+1)(n-k)} \leq \frac{n+1}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k}} \geq \frac{2}{n+1} \cdot n. \end{aligned}$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$. Значит, члены ряда (8.6) не стремятся к нулю, и потому он расходится.

Вопросы для самоконтроля

1. Ряд сходится условно. Изменится ли его сумма, если в нем поменять местами конечное число членов?
2. Некоторый ряд остается сходящимся при любой перестановке его членов. Что можно сказать о характере сходимости?
3. Можно ли из условно сходящегося ряда путем перестановки его членов получить расходящийся ряд?
4. Всегда ли сходится произведение двух неабсолютно сходящихся рядов?

§ 9. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

До сих пор мы рассматривали ряды, членами которых были действительные числа или функции. Рассмотрим теперь ряды с комплексными членами. Сначала определим понятие сходимости последовательности комплексных чисел. Напомним, что если изобразить комплексные числа z и w на плоскости, то расстояние между полученными точками равно $|z - w|$ (рис. 3). Это позволяет ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е 9.1. Последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ комплексных чисел *сходится* к комплексному числу z , если числовая последовательность $|z_n - z|$ сходится к нулю, т. е. если $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$.

Поскольку при $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$ имеем:

$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2},$$

то вместо $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$ можно

писать:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

Докажем следующее утверждение.

Л е м м а 9.1. Для того чтобы последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ комплексных чисел, где $z_n = x_n + iy_n$, сходилась к комплексному числу $z = x + iy$, необходимо

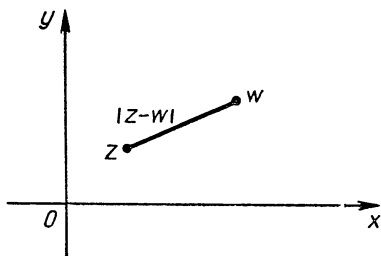


Рис. 3

и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Доказательство. Очевидно, что $|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$ и $|y_n - y| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$.

Поэтому если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0$, то и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y| = 0,$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

С другой стороны, из рисунка 4 видно, что

$$|M_n M| \leq |M_n A| + |AM|, \text{ т. е.}$$

$$\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

Поэтому если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, т. е. если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y| = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0.$$

А это и значит, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Понятие предела последовательности комплексных чисел обладает обычными свойствами: если предел последовательности существует, то он однозначно определен; подпоследовательность сходящейся последовательности имеет тот же предел, что и вся последовательность; сходящаяся последовательность ограничена, т. е. существует такое A , что все $|z_n| < A$, и т. д.

Отметим еще, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$.

Для доказательства достаточно заметить, что $||a| - |b|| \leq |a - b|$, и потому из $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$ вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} ||z_n| - |z|| = 0$.

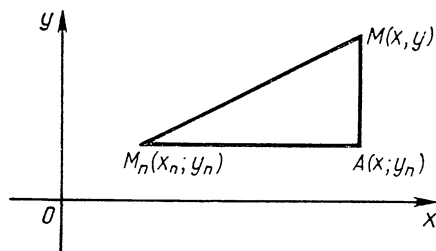


Рис. 4

Так же как и в случае, когда элементы ряда действительные числа, определяются понятия бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей, доказываются свойства таких последовательностей, а также остаются справедливыми и теоремы о пределе суммы, произведения и частного.

Рассмотрим теперь ряды с комплексными членами. Как и в случае рядов с действительными членами назовем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ с комплексными членами *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм этого ряда. Значение этого предела называется *суммой ряда*.

Из леммы 9.1 следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n = x_n + iy_n$, сходится в том и только в том случае, когда сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, составленные из действительных и мнимых частей членов этого ряда. При этом имеет место равенство $s = x + iy$, где $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$. Поскольку вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами, теоремы о сложении рядов, об умножении членов ряда на число и т. д. остаются справедливыми и в комплексном случае. Справедлив и необходимый признак сходимости: *для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходилсся, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю*, т. е. чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$.

Остаются в силе и теоремы об одновременной сходимости ряда и его остатков и о стремлении к нулю остатка сходящегося ряда.

Понятие абсолютной сходимости определяется для рядов с комплексными членами следующим образом:

О п р е д е л е н и е 9.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, составленный из модулей его членов.

Легко проверить, что это определение равносильно следующему:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n = x_n + iy_n$, называется *абсолютно сходящимся*, если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$.

Для абсолютно сходящихся рядов остаются в силе теоремы о перестановке членов ряда и об умножении рядов. Доказательства этих теорем такие же, как и для рядов с действительными членами. Сохраняет силу и оценка

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Для доказательства этого неравенства сначала на основании свойств модуля комплексного числа устанавливается оценка

$$\left| \sum_{n=1}^k z_n \right| \leq \sum_{n=1}^k |z_n|,$$

затем k устремляется к ∞ и используется теорема о пределе модуля.

Пример 9.1. Найдем предел последовательности, общий член которой

$$z_n = \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 7} + i \frac{7n + 5}{4n + 1}.$$

Решение. $z_n = x_n + iy_n$. В данном случае

$$x_n = \frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 7}, \quad y_n = \frac{7n + 5}{4n + 1},$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{7}{4}$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{2}{3} + i \frac{7}{4}.$$

Пример 9.2. Найдем предел последовательности

$$\{z_n\} = \left\{ \left(\frac{2+i}{3} \right)^n \right\}.$$

Решение. Вычислим $|z_n|$. Воспользуемся тем, что модуль произведения равен произведению модулей. Следовательно,

$$|z_n| = \left| \left(\frac{2+i}{3} \right)^n \right| = \left| \frac{2+i}{3} \right|^n = \left(\sqrt{\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^n.$$

Так как $\frac{\sqrt{5}}{3} < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 0$.

Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - 0| = 0$, и, таким образом, по определению предела получаем: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Пример 9.3. Напишем сумму первых n членов ряда:

$$\left(2 + \frac{7i}{1 \cdot 2} \right) + \left(1 + \frac{7i}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{7i}{3 \cdot 4} \right) + \dots$$

и, исходя из определения суммы ряда, установим, сходится ли этот ряд.

Решение.

$$s_n = \left(2 + \frac{7i}{1 \cdot 2} \right) + \left(1 + \frac{7i}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{7i}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{7i}{n(n+1)} \right).$$

Чтобы ответить на вопрос о сходимости ряда, запишем s_n в следующем виде:

$$s_n = \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) + 7 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) i.$$

$$\text{Далее } 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}},$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(см. пример 1.5), поэтому

$$s_n = \left(4 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + 7\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)i$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 4 + 7i.$$

Ряд сходится, и его сумма s равна $4 + 7i$.

Пример 9.4. Установим характер сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3} + i \frac{(-1)^n 8}{n^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n^3} + i \frac{(-1)^n 8}{n} \right).$$

Решение. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8}{n^2}$ сходятся абсолютно, а потому в случае а) ряд с комплексными членами сходится абсолютно.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8}{n}$ сходится условно, и, таким образом, в случае

б) ряд с комплексными членами также сходится условно.

Вопросы для самоконтроля

1. Каков геометрический смысл модуля разности $|z - w|$ двух комплексных чисел z и w ?

2. Каков геометрический смысл множества

$$\{z \mid |z - z_0| < \delta, (\delta > 0)\}?$$

3. Что означает сходимость последовательности

$$\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}?$$

4. Какое условие является необходимым и достаточным для сходимости последовательности комплексных чисел?

5. Что означает сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)?$$

6. Какое условие является необходимым и достаточным для сходимости ряда с комплексными членами?

7. Какой ряд с комплексными членами называется абсолютно сходящимся?

8. Какое условие необходимо и достаточно для абсолютной сходимости ряда с комплексными членами?

Упражнения

58. Докажите, что последовательность комплексных чисел может иметь только один предел.

59. Вычислите пределы последовательностей

а) $\left\{ \frac{3n+2}{n} + i \frac{4n}{2n+1} \right\}$; б) $\left\{ \frac{2+in}{5-in} \right\}$; в) $\left\{ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{5} \right)^n \right\}$.

60. Докажите, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = Z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = W$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = Z + W$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n w_n) = ZW$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{Z}{W}$ ($W \neq 0$) (z_n, w_n, Z, W — комплексные числа).

61. Докажите, что для абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$

необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходились ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

62. Выясните, какие из данных рядов сходятся абсолютно, какие условно и какие расходятся:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + i \frac{5}{3^n} \right)$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2} \right)$;

в) $\frac{(-1)^{n+1}}{n} i$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{i}{n\sqrt{n}} \right)$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} + i \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} i \frac{\sin(2n+1)}{5^n}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n^2} + \frac{i(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}} \right)$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^4} \right)$.

ГЛАВА III

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 10. ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

В § 3 были введены понятия функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и последовательности $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ его частичных сумм. Сумма такого ряда определена на множестве X_1 чисел x_0 , для которых сходятся числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, и является на этом множестве функцией от x , $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$. Рассмотрим прежде всего несколько примеров на отыскание области сходимости функционального ряда.

Пример 10.1. Определим область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

Решение. При каждом значении x ($x \neq -1$) имеем обычный числовой ряд. Применяем к нему признак Даламбера, как это делалось при исследовании абсолютной сходимости. Вводим величину $D_n^*(x) = \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$. В нашем примере при $x \neq \pm 1$

$$D_n^*(x) = \frac{1}{2n+1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{n+1} : \frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n = \frac{2n-1}{2n+1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

Отыскиваем предел

$$\begin{aligned} D^*(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \\ &= \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|. \end{aligned}$$

Для тех значений x , при которых $D^*(x) < 1$, рассматриваемый ряд сходится абсолютно. Для значений x , при которых $D^*(x) > 1$, исследуемый ряд расходится (общий член не стремится к нулю). Точки, для которых $D^*(x) = 1$, подлежат специальному рассмотре-

нию, так же как и точки, для которых нельзя было составить величину $D_n^*(x)$. В данном примере это точки $x = \pm 1$. Сразу отметим, что при $x = 1$ ряд состоит из одних нулей и, очевидно, является абсолютно сходящимся, а при $x = -1$ ряд не определен.

Решим неравенство

$$D^*(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1.$$

Это неравенство равносильно следующему: $|1-x| < |1+x|$. Но $|1-x|$ — расстояние от точки $M(x)$ до точки $A(1)$, а $|1+x|$ — расстояние от точки $M(x)$ до $B(-1)$. Так как начало координат равноудалено от точек A и B , то неравенство $|MA| < |MB|$ выполняется, если точка M лежит на положительной полуоси, т. е. если $x > 0$. При $x < 0$ имеем $|MA| > |MB|$, и потому

$$\frac{|1-x|}{|1+x|} > 1,$$

а поэтому ряд расходится.

При $x = 0$ имеем $D^*(x) = \left| \frac{1-0}{1+0} \right| = 1$, и потому эту точку рассматриваем отдельно. Получаем ряд:

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \dots,$$

который сходится условно. Итак, областью сходимости ряда является числовой луч $[0; \infty[$. При $x = 0$ исследуемый ряд сходится условно, а в остальных точках луча — абсолютно.

Заметим, что для отыскания области сходимости этого ряда можно было применить признак Коши (радикальный). В этом случае вводится последовательность $C_n^*(x) = \sqrt[n]{|u_n(x)|}$ и отыскивается предел $C^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^*(x)$ (если он существует). Далее решается неравенство $C^*(x) < 1$. На множестве, являющемся его решением, ряд сходится абсолютно. Там, где $C^*(x) > 1$, ряд расходится (общий член не стремится к нулю). Точки, в которых $C^*(x) = 1$, требуют отдельного рассмотрения.

Пример 10.2. Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. Имеем:

$$D_n^*(x) = \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^{n+1}}{1+x^{2n+2}} : \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} = |x| \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}.$$

Далее

$$D^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}} = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| < 1, \\ 1 & \text{при } |x| = 1, \\ \frac{1}{|x|} & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Здесь требует пояснения лишь случай, когда $|x| > 1$. Тогда

$$|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{2n}}{1 + x^{2n+2}} = \frac{|x|}{x^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{2n}} + 1}{\frac{1}{x^{2n+2}} + 1} = \frac{1}{|x|}.$$

Из выражения для $D^*(x)$ следует, что и при $|x| < 1$ и при $|x| > 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно. Заметим, что при $x = 0$ признак Даламбера не применим, но в этом случае ряд состоит из нулей и его абсолютная сходимость тривиальна.

Далее $D^*(x) = 1$ при $x = \pm 1$, но в этих точках общий член ряда по абсолютной величине равен $\frac{1}{2}$, и потому ряд расходится.

Итак, во всех точках числовой оси, кроме $x = \pm 1$, рассматриваемый ряд сходится и притом абсолютно.

Пример 10.3. Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n(x)}{n}$.

Решение. Применяем признак Даламбера. Имеем:

$$D_n^* = \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{n}{n+1} |\operatorname{tg} x|,$$

$$D^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(x) = \operatorname{tg} x.$$

В силу периодичности тангенса решение неравенства $D^*(x) = |\operatorname{tg} x| < 1$ достаточно провести лишь для отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

В силу монотонности тангенса на этом отрезке получаем: $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$. Область абсолютной сходимости является объединением интервалов $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$. Легко проверить, что на левых концах этих интервалов исследуемый ряд сходится условно, а на правых — расходится (проверьте это!).

Пример 10.4. Найдем область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{2n-2}}.$$

Решение. Множество, на котором ряд определен, задается условием $\frac{x}{2^{2n-2}} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$, т. е.

$$x \neq 2^{2n-3} (2k + 1) \pi, n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}.$$

Для всех x , для которых ряд определен, начиная с некоторого значения $n = n_0$, аргумент $\frac{x}{2^{2n-2}}$ принадлежит интервалу

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Для этих значений } n \text{ имеем: } |u_n(x)| = 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{|x|}{2^{2n-2}}.$$

Применим к ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{|x|}{2^{2n-2}}$ и ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ вторую теорему сравнения для положительных рядов. Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{|x|}{2^{2n-2}} : \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n-2} \frac{|x|}{2^{2n-2}} = |x|.$$

Этот предел конечен, поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{|x|}{2^{2n-2}}$ сходится вместе с геометрической прогрессией $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Следовательно, рассматриваемый ряд абсолютно сходится во всех точках, где он определен.

Вопросы для самоконтроля

1. На каком множестве имеет смысл рассматривать функциональную последовательность (ряд)?
2. Когда говорят, что функциональная последовательность (ряд) сходится на некотором множестве?
3. Что представляет собой сумма функционального ряда?
4. На каком множестве определена предельная функция (сумма ряда) заданной функциональной последовательности (ряда)?
5. Какими методами в примерах 10.1—10.4 находится область сходимости функционального ряда?
6. Что общего и чем отличается использование признаков Даламбера и Коши (радикального) при исследовании абсолютной сходимости числового ряда и при отыскании области сходимости функционального ряда?

Упражнения

63. Найдите предельную функцию $f(x)$ для функциональной последовательности, общий член которой равен:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}.$$

Определите соответствующее N для $\varepsilon = 0,001$ и $x = -e$.

64. Найдите области сходимости и суммы функциональных рядов:

а) $x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + (x^n - x^{n-1}) + \dots$;

б) $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} + \dots$.

У к а з а н и е. Разложите дробь $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ на простейшие.

65. Определите области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n x^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n$;

$$\begin{aligned}
 & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}; \\
 & \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}; \quad \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{n-1}})}; \\
 & \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^n)}; \quad \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}; \\
 & \text{м) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n-1)^2}.
 \end{aligned}$$

§ 11. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1. Введение. Важным является вопрос о взаимоотношении между свойствами членов функционального ряда и свойствами его суммы:

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Рассмотрение простых примеров показывает, что эти свойства могут существенно отличаться. Например, все функции $s_n(x)$ могут быть непрерывными, а функция $s(x)$ — разрывной, последовательность интегралов от функции $s_n(x)$ может не сходиться к интегралу от функции $s(x)$ и т. д.

Пример 11.1. Функции x^n , $n = 1, 2, \dots$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$. При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Поэтому функция $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$ равна нулю на $[0; 1[$ и равна 1

при $x = 1$. Эта функция разрывна.

Пример 11.2. Пусть

$$s_n(x) = \begin{cases} 6n^3 x \left(\frac{1}{n} - x \right), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда для любого $x \in [0; 1]$ имеем $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0$ (для $x \neq 0$ это следует из того, что все $s_n(x) = 0$ при $n > \frac{1}{x}$, а для $x = 0$ — из того, что все $s_n(0) = 0$). Поэтому и $\int_0^1 s(x) dx = 0$. Но

$$\int_0^1 s_n(x) dx = 6n^3 \int_0^{\frac{1}{n}} x \left(\frac{1}{n} - x \right) dx = 6n^3 \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Мы видим, что, хотя $s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$,

$$\int_0^1 s(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 s_n(x) dx.$$

Поэтому необходимо выделить класс функциональных рядов, для которых имеют место теоремы, аналогичные теоремам о конечных суммах: непрерывность суммы ряда, состоящего из непрерывных функций, возможность почленного интегрирования и дифференцирования и т. д.

2. Чебышевское расстояние между функциями. Пусть функции f и g ограничены на множестве X . Тогда на этом множестве ограничена и функция $f - g$, а следовательно, и функция $|f - g|$. Поэтому существует число $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, которое обозначим $\rho_X(f, g)$.

О п р е д е л е н и е 11.1. Если функции f и g ограничены на множестве X , то *чебышевским расстоянием* между этими функциями на X называется число¹:

$$\rho_X(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

П р и м е р 11.3. Вычислим чебышевское расстояние между функциями $f(x) = \sin 2x$ и $g(x) = x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Р е ш е н и е. По определению расстояния имеем:

$$\rho_{[0; \pi]}(f, g) = \sup_{x \in [0; \pi]} |x - \sin 2x|.$$

Так как функция $y = |x - \sin 2x|$ непрерывна на $[0; \pi]$, то $\rho_{[0; \pi]}(f, g)$ равно ее наибольшему значению. Для отыскания этой величины найдем точки, в которых производная $(x - \sin 2x)' = 1 - 2 \cos 2x$ обращается в нуль, а затем сравним значения $|x - \sin 2x|$ в этих точках и на концах отрезка $[0; \pi]$. Корнями уравнения

$$1 - 2 \cos 2x = 0$$

на отрезке $[0; \pi]$ будут числа $\frac{\pi}{6}$ и $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Далее имеем:

$$|x - \sin 2x| \Big|_{x=0} = 0; \quad |x - \sin 2x| \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6};$$

$$|x - \sin 2x| \Big|_{x=\frac{5}{6}\pi} = \frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}; \quad |x - \sin 2x| \Big|_{x=\pi} = \pi.$$

Наибольшим из этих чисел является $\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$. Это и есть искомое значение $\rho_{[0; \pi]}(f, g)$.

¹ Изучая задачу о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, выдающийся русский математик П. Л. Чебышев впервые ввел эту величину.

Пример 11.4. Вычислим предел $f(x)$ последовательности $f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$ на отрезке $[0; \pi]$ и найдем затем чебышевское расстояние $\rho_{[0; \pi]}(f_n, f)$.

Решение. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$), то

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in]0; \pi[, \\ 0 & \text{при } x = 0; \pi. \end{cases}$$

Тогда $\rho_{[0; \pi]}(f_n, f) = \sup_{]0; \pi[} (1 - \sqrt[n]{\sin x}) = 1$, так как $\lim_{x \rightarrow +0} (1 - \sqrt[n]{\sin x}) = 1 - \sqrt[n]{0} = 1$, и, следовательно, любое число, меньшее 1, не может быть верхней границей для

$$1 - \sqrt[n]{\sin x} \text{ на } [0; \pi]. \text{ Поэтому } \rho_{[0; \pi]}(f_n, f) = 1.$$

Из определения чебышевского расстояния вытекает, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x) - g(x)| \leq \rho_X(f, g).$$

Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a; b]$, то чебышевское расстояние между ними равно наибольшему значению функций $|f - g|$ на этом отрезке.

Чебышевское расстояние между функциями обладает следующими свойствами:

1) Для любых двух ограниченных на X функций f и g имеем $\rho_X(f, g) \geq 0$, причем $\rho_X(f, g) = 0$ в том и только в том случае, когда $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

2) Для любых двух ограниченных на X функций f и g имеем $\rho_X(f, g) = \rho_X(g, f)$.

3) Для любых трех ограниченных на X функций f, g, h имеем $\rho_X(f, h) \leq \rho_X(f, g) + \rho_X(g, h)$.

4) Если $Y \subset X$, то $\rho_Y(f, g) \leq \rho_X(f, g)$.

Свойство 1) вытекает из того, что $|f(x) - g(x)| \geq 0$, а потому и $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq 0$. При этом если $\rho_X(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0$, то для всех $x \in X$ имеем

$$|f(x) - g(x)| = 0,$$

т. е.

$$f(x) = g(x).$$

Для доказательства свойства 2) достаточно заметить, что $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$. Докажем, наконец, свойство 3).

Возьмем любое число $x_0 \in X$. Имеем:

$$|f(x_0) - h(x_0)| = |f(x_0) - g(x_0) + g(x_0) - h(x_0)| \leq |f(x_0) - g(x_0)| + |g(x_0) - h(x_0)|.$$

Но $|f(x_0) - g(x_0)| \leq \rho_X(f, g)$ и $|g(x_0) - h(x_0)| \leq \rho_X(g, h)$,

а потому

$$|f(x_0) - h(x_0)| \leq \rho_X(f, g) + \rho_X(g, h). \quad (11.1)$$

Значит, для всех $x_0 \in X$ выполняется неравенство (11.1). Оно показывает, что $\rho_X(f, g) + \rho_X(g, h)$ — одна из верхних границ для значений функции $|f - h|$ на X . Но тогда это число не меньше точной верхней грани, т. е. $\rho_X(f, h)$, а потому

$$\rho_X(f, h) \leq \rho_X(f, g) + \rho_X(g, h).$$

Свойство 4) очевидно, так как из $Y \subset X$ следует, что

$$\sup_{x \in Y} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

В математике множество, для любых элементов которого определено их расстояние $\rho(x, y)$, обладающее свойствами 1) — 3), называют *метрическим пространством*. Мы доказали, что множество функций, ограниченных на множестве X , является метрическим пространством относительно *чебышевского расстояния* (или, как еще говорят, *чебышевской метрики*).

3. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности.

О п р е д е л е н и е 11.2. Последовательность $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ функций, ограниченных на множестве X , называется *равномерно сходящейся* на этом множестве к функции $s(x)$, если числовая последовательность $\{\rho_X(s_n, s)\}$ стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(s_n, s) = 0.$$

Это понятие имеет простой геометрический смысл. Начертим график функции $y = s(x)$, $x \in X$ и сместим его на ε вверх и вниз. Получим кривые $y = s(x) - \varepsilon$ и $y = s(x) + \varepsilon$, ограничивающие криволинейную полосу (рис. 5). Последовательность $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$, $x \in X$, равномерно сходится на X к $s(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ графики всех членов этой последовательности попадают, начиная с некоторого номера, в такую криволинейную полосу.

Т е о р е м а 11.1. Если функциональная последовательность $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ равномерно сходится на X к $s(x)$, то для любого $x_0 \in X$ числовая последовательность $s_1(x_0), \dots, s_n(x_0), \dots$ сходится к $s(x_0)$.

В самом деле, имеет место неравенство $|s_n(x_0) - s(x_0)| \leq \rho_X(s_n, s)$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(s_n, s) = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x_0) - s(x_0)| = 0$, а это и значит, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = s(x_0)$.

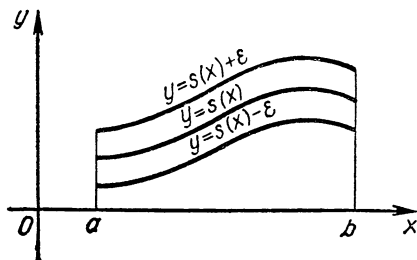


Рис. 5

Пример 11.5. Найдем предел функциональной последовательности, общий член которой равен $f_n(x) = xe^{-nx}$, $x \in [0; \infty[$, и исследуем характер сходимости.

Решение. Для каждого значения $x \in [0; \infty[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} xe^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{nx}} = 0,$$

при $x = 0$ для всех n $f_n(0) = 0$. Таким образом, пределом функциональной последовательности $f_n(x)$ на $[0; \infty[$ является функция $f(x) = 0$.

Найдем чебышевское расстояние $\rho_{[0; \infty[}(f_n, f) = \sup_{x \in [0; \infty[} f_n(x)$.

Для исследования поведения $f_n(x) = xe^{-nx}$ вычислим производную:

$$f'_n(x) = e^{-nx} - nx e^{-nx} = (1 - nx) e^{-nx}.$$

На интервале $]0; \frac{1}{n}[$ $f'_n(x) > 0$, а на $]\frac{1}{n}; \infty[$ $f'_n(x) < 0$. Следовательно, на $[0; \frac{1}{n}]$ функция $f_n(x)$ возрастает, а на $[\frac{1}{n}; \infty[$ — убывает, и потому наибольшее значение, равное $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-1}$, достигается в точке $x = \frac{1}{n}$. Это и есть $\sup_{x \in [0; \infty[} f_n(x)$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} e^{-1} = 0,$$

то функциональная последовательность равномерно сходится к $f(x) = 0$.

Пример 11.6. Выясним характер сходимости к своему пределу функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, где

$$f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Решение. В примере 11.4 было показано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in]0; \pi[, \\ 0, & \text{при } x = 0; \pi. \end{cases}$$

При этом $\rho_{[0; \pi]}(f, f_n) = 1$. Так как не выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{[0; \pi]}(f, f_n) = 0$, то сходимость последовательности $\{f_n\}$ к f не является равномерной.

4. Равномерно сходящиеся ряды. Признак Вейерштрасса.

Определение 11.3. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in X$ называется *равномерно сходящимся к функции $s(x)$ на X* , если последовательность $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ его частичных сумм равномерно сходится к $s(x)$ на X .

Для проверки того, сходится ли данный ряд равномерно к функции $s(x)$, используется следующий признак Вейерштрасса:

Теорема 11.2. Пусть $(U) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — функциональный ряд на множестве X . Если существует такой сходящийся ряд $(A) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно и равномерно сходится на X .

Доказательство. Для любого $x_0 \in X$ выполняется неравенство $|u_n(x_0)| \leq a_n$. Поэтому, в силу сходимости ряда (A) и признака сравнения рядов с неотрицательными членами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$ сходится. Это и значит, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно сходится на X . При этом для любого $x \in X$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Поэтому сумма $s(x)$ ряда (U) ограничена на X числом $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Докажем теперь, что $\lim \rho_X(s_n, s) = 0$ (расстояние $\rho_X(s_n, s)$ существует, так как функции $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ и $s(x)$ ограничены на X). Зададим любое число $\varepsilon > 0$. Так как ряд (A) сходится, то его остаток r_n стремится к нулю, а потому найдется такое n_0 , что $r_{n_0} < \varepsilon$. Но тогда имеем для всех $x \in X$ и $n > n_0$:

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = r_n \leq r_{n_0} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Поскольку неравенство (11.2) выполняется для всех $x \in X$, то и $\sup |s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$, а это и значит, что $\rho_X(s_n, s) \leq \varepsilon$ для всех $n > n_0$, т. е. что $\lim \rho_X(s_n, s) = 0$. Мы доказали равномерную и абсолютную сходимость ряда (U) к $s(x)$.

Пример 11.7. Для всех членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ при любом значении x выполняется неравенство $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ с положительными членами сходится, то данный функцио-

нальный ряд абсолютно и равномерно сходится на всей числовой прямой.

Пример 11.8. Для всех членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ на отрезке $[-1; 1]$

выполняется неравенство $\left| \frac{x^n}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$. Значит, этот ряд равномерно и абсолютно сходится на отрезке $[-1; 1]$.

5. Сохранение свойства непрерывности в случае равномерной сходимости. Пользуясь понятием равномерной сходимости, сформулируем достаточное условие для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был непрерывной функцией.

Теорема 11.3. Пусть все члены последовательности $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., $s_n(x)$, ... непрерывны на множестве X , и пусть эта последовательность равномерно сходится на X к функции $s(x)$. Тогда функция $s(x)$ непрерывна на X .

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(s_n, s) = 0$, то найдется такое n , что $\rho_X(s_n, s) < \frac{\varepsilon}{3}$, и потому для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Далее, так как функция $s_n(x)$ непрерывна, то найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда для любого x , такого, что $|x - x_0| < \delta$, имеем:

$$\begin{aligned} |s(x) - s(x_0)| &= |s(x) - s_n(x) + s_n(x) - s_n(x_0) + s_n(x_0) - s(x_0)| \\ &\leq |s(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и значит, что функция $s(x)$ непрерывна в точке x_0 . Так как x_0 — любая точка из X , то $s(x)$ непрерывна на X .

Следствие. Если все члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на множестве X и этот ряд равномерно сходится на X к функции $s(x)$, то $s(x)$ непрерывна на X .

В самом деле, из условия вытекает, что все частичные суммы $s_n(x)$ данного ряда непрерывны на X как суммы конечного числа непрерывных функций, причем последовательность $s_1(x)$, ..., $s_n(x)$, ... равномерно сходится на X к $s(x)$. По теореме 11.3 функция $s(x)$ непрерывна на X .

Пример 11.9. Функция $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрерывна на всей

числовой прямой, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ состоит из непрерывных функций и равномерно сходится на всей числовой прямой.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли предельная функция функциональной последовательности, все члены которой непрерывны, оказаться разрывной функцией?

2. Предельная функция в примере 11.4 имеет разрывы в точках 0, π . В чем причина этого?

3. Может ли сумма ряда, все члены которого непрерывны, оказаться разрывной функцией?

4. Первый член сходящегося ряда — разрывная функция, все остальные члены — непрерывные функции. Можно ли утверждать, что сумма ряда есть разрывная функция?

5. Функциональный ряд равномерно сходится на отрезке. Сходится ли он на этом отрезке?

6. Для некоторого сходящегося на отрезке функционального ряда признак Вейерштрасса равномерной сходимости не выполняется. Можно ли утверждать, что ряд на этом отрезке сходится неравномерно?

7. Члены ряда — непрерывные функции, сумма — разрывная функция. Что можно сказать о характере сходимости ряда?

8. Члены ряда и сумма ряда непрерывны на отрезке. Можно ли утверждать, что ряд равномерно сходится на этом отрезке?

Упражнения

66. Найдите расстояние между функциями $\sin x$ и $\cos x$ на отрезке: а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

67. Найдите расстояние между функциями $f_1(x) = -x^2 + 1$ и $f_2(x) = x - 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

68. Исследуйте на равномерную сходимость нижеприведенные последовательности функций с общим членом

а) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$; б) $f_n(x) = \sin^n x$, $x \in [0; \pi]$;

в) $f_n(x) = \cos^n x$, $x \in [0; \pi]$; г) $f_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$, $x \in [0; \pi]$;

д) $f_n(x) = \frac{1}{n + |\sin 2x|}$; е) $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}$.

69. Исследуйте на равномерную сходимость функциональный ряд:
 $x + (xe^{-x^2} - x) + (2xe^{-2x^2} - xe^{-x^2}) + \dots + (nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}) + \dots$, ($x \geq 0$).

70. Убедитесь, что ряд:

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \dots$$

сходится на всей числовой оси. Покажите, что этот ряд сходится неравномерно на любом отрезке, содержащем начало координат, и равномерно на любом другом отрезке.

71. Докажите, что для равномерной сходимости ряда на отрезке $[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x) = 0$, где $\rho_n(x)$ — сумма остатка ряда.

72. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на $[a; b]$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ также сходится равномерно на этом отрезке.

73. Используя признак Вейерштрасса, докажите равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in]-\infty; \infty[$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$, $x \in [0; \infty[$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $x \in [-1; 1]$; г) $\sum_{n=1}^n \frac{n^2}{V^{n!}} (x^n - x^{-n})$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \in [0; \infty[$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + \sin x}{2^n + e^{nx}}$, $x \in]-\infty; \infty[$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}$, $x \in]-\infty; \infty[$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$, $x \in [a; b]$.

§ 12. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

1. Почленное интегрирование функциональных рядов. При рассмотрении вопроса о почленном интегрировании функциональных рядов окажется полезной следующая лемма.

Л е м м а 12.1. Пусть на отрезке $[a; b]$ функции s_n и s непрерывны. Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| \leq \rho(s, s_n)(b-a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (s(x) - s_n(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |s(x) - s_n(x)| dx. \end{aligned}$$

Но для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $|s(x) - s_n(x)| \leq \rho(s_n, s)$. По теореме об оценке определенного интеграла получаем, что

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| \leq \rho(s_n, s)(b-a).$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 12.1. Пусть последовательность $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ состоит из функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$, и пусть

она равномерно сходится к функции $s(x)$ (непрерывной на $[a; b]$ по теореме 11.3). Тогда имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx.$$

Доказательство. Из леммы 12.1 следует, что

$$\left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| \leq \rho(s_n, s)(b-a).$$

По условию теоремы $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(s_n, s) = 0$, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b s(x) dx - \int_a^b s_n(x) dx \right| = 0.$$

А это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b s(x) dx$.

Теорема 12.2. Если члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и этот ряд равномерно сходится на этом отрезке к функции $s(x)$, то

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

(короче говоря, равномерно сходящиеся ряды можно почленно интегрировать).

Доказательство. Из того, что функции $u_k(x)$ непрерывны на $[a; b]$, следует, что и частичные суммы $s_n(x)$ данного ряда непрерывны на $[a; b]$. При этом по условию последовательность функций $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ равномерно сходится на $[a; b]$ к $s(x)$. Значит, по теореме 12.1 имеем:

$$\int_a^b s(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n(x) dx.$$

Но конечные суммы функций можно интегрировать почленно, и потому

$$\int_a^b s_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx.$$

Мы доказали, что

$$\int_a^b s(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx,$$

а это и означает, что

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx.$$

Пример 12.1. Покажем, что ряд:

$$x + x^3 + \dots + x^{2n-1} + \dots \quad (12.1)$$

равномерно сходится на отрезке $[-1 + \varepsilon; 1 - \varepsilon]$, где ε — любое положительное число, меньшее 1, и найдем сумму ряда:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \dots \quad (12.2)$$

Решение. Члены ряда (12.1) по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящегося положительного числового ряда:

$$q + q^3 + \dots + q^{2n-1} + \dots, \quad (12.3)$$

где $q = 1 - \varepsilon$, $0 < 1 - \varepsilon < 1$. Следовательно, на заданном отрезке ряд (12.1) по признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

Исходный ряд (12.1) при $|x| < 1$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем x^2 . Поэтому его сумма $s(x) = \frac{x}{1-x^2}$, т. е.

$$x + x^3 + \dots + x^{2n-1} + \dots = \frac{x}{1-x^2} \quad (|x| < 1).$$

В силу равномерной сходимости ряда (12.1) при $-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$ его можно почленно интегрировать. Интегрирование проведем в пределах от 0 до x , где $|x| < 1$ (всегда можно найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы $|x| \leq 1 - \varepsilon < 1$ и поэтому $-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$). Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^x (t + t^3 + \dots + t^{2n-1} + \dots) dt &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \\ &+ \dots = \int_0^x \frac{t dt}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Найдем интеграл, стоящий справа:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{1-t^2} &= -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1-t^2)}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-t^2) \Big|_0^x = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|x| < 1$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \dots = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Почленное дифференцирование функциональных рядов. Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании функциональных последовательностей и рядов.

Т е о р е м а 12.3. Пусть выполнены условия: функции $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные, последовательность функций $s'_1(x), \dots, s'_n(x), \dots$ равномерно сходится на $[a; b]$ к функции $\sigma(x)$, причем хотя бы для одного $x_0 \in [a; b]$ последовательность $s_1(x_0), \dots, s_n(x_0), \dots$ сходится. Тогда

а) последовательность $s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$ сходится на $[a; b]$ к некоторой функции $s(x)$,

б) производная от $s(x)$ существует и $s'(x) = \sigma(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Ньютона — Лейбница

$$s_n(x) = s_n(x_0) + \int_{x_0}^x s'_n(t) dt.$$

Так как последовательность функций $(s'_n(x))$ равномерно сходится на $[a; b]$ к $\sigma(x)$ и $[x_0; x] \subset [a; b]$, то по теореме 12.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x s'_n(t) dt = \int_{x_0}^x \sigma(t) dt.$$

Кроме того, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0)$, который мы обозначим $s(x_0)$. Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x_0) + \int_{x_0}^x \sigma(t) dt,$$

$$\text{т. е.} \quad s(x) = s(x_0) + \int_{x_0}^x \sigma(t) dt. \quad (12.4)$$

Но последовательность $(s'_n(x))$ равномерно на $[a; b]$ сходится к $\sigma(x)$, и потому функция $\sigma(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Поэтому производная интеграла $\int_{x_0}^x \sigma(t) dt$ по x равна $\sigma(x)$. Так как $s(x_0)$ — постоянное число, то правая, а следовательно и левая части равенства (12.4) имеют производную. Дифференцируя обе части равенства (12.4) по x , получаем, что $s'(x) = \sigma(x)$.

Отметим, что в силу равенства

$$\begin{aligned} s(x) - s_n(x) &= s(x_0) - s_n(x_0) + \int_{x_0}^x (s'(t) - s'_n(t)) dt = \\ &= s(x_0) - s_n(x_0) + \int_{x_0}^x (\sigma(t) - s'_n(t)) dt \end{aligned}$$

и неравенств

$$|x - x_0| \leq b - a, \quad \rho_{[x_0; x]}(\sigma, s'_n) < \rho_{[a; b]}(\sigma, s'_n)$$

имеем:

$$\rho_{[a; b]}(s, s_n) \leq |s(x_0) - s_n(x_0)| + (b - a) \rho_{[a; b]}(\sigma, s'_n),$$

и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{[a; b]}(s, s_n) = 0$. Значит, последовательность $\{s_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a; b]$ к $s(x)$.

Т е о р е м а 12.4. Пусть функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в некоторой точке x_0 отрезка $[a; b]$ и пусть при всех n функции $u'_k(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ равномерно сходится на $[a; b]$ к $\sigma(x)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на отрезке $[a; b]$ и его сумма $s(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ (кратко говоря, ряд можно почленно дифференцировать, если после этого получится равномерно сходящийся ряд).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы вытекает, что функции $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ имеют непрерывную производную $s'_n(x) = \sum_{k=1}^n u'_k(x)$ на отрезке $[a; b]$, причем последовательность функций $s'_1(x), \dots, s'_n(x), \dots$ равномерно сходится на $[a; b]$ к функции $\sigma(x)$. Из теоремы 12.3 вытекает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на $[a; b]$ к функции $s(x)$, причем $s'(x) = \sigma(x)$. Иными словами,

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

Теорема доказана.

П р и м е р 12.2. Если почленно продифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, получится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, который равномерно сходится на всей числовой прямой. Значит, для суммы $s(x)$ исходного ряда:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

П р и м е р 12.3. Выясним, применима ли теорема 12.4 к ряду

$$(A): \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + \sin nx}{n^3} \right) \text{ на } [0; \pi].$$

Решение. После почленного дифференцирования данного ряда получается равномерно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. Тем не менее теорема 12.4 неприменима в данном случае, так как ряд (А) расходится при всех значениях x . Например, при $x = 0$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, т. е. известный гармонический ряд. Расходимость ряда (А) при любом $x \in [0; \pi]$ следует из того, что $\frac{n^2 + \sin nx}{n^3} \geq \frac{n^2 - 1}{n^3}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3}$ расходится.

Вопросы для самоконтроля

1. Что означает фраза «функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать на $[a; b]$ »?

2. Что означает фраза «функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно дифференцировать в точке x_0 »?

3. В условиях теорем о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функциональных рядов используется понятие равномерной сходимости ряда. В чем различие использования понятия равномерной сходимости в этих теоремах?

4. В примере 12.1 использовалась формула $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$. Почему знак модуля там был опущен?

5. Ряд с дифференцируемыми членами сходится равномерно. Можно ли утверждать, что этот ряд можно почленно дифференцировать?

6. Производные членов функционального ряда существуют и непрерывны. Ряд, составленный из производных, сходится равномерно на $[a; b]$. Можно ли исходный ряд почленно дифференцировать?

7. В примерах 12.2 и 12.3 относительно некоторых рядов говорится, что они сходятся равномерно. На основании чего сделано такое заключение?

8. Для некоторого функционального ряда выполнено условие теоремы 12.4 о почленном дифференцировании. Что можно сказать о характере его сходимости?

Упражнения

74. Исходя из равенства

$$x^2 + x^5 + \dots + x^{9n-1} + \dots = \frac{x^2}{1 - x^3} \quad (|x| < 1),$$

найдите сумму ряда:

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \dots + \frac{x^{3n}}{3n} + \dots$$

75. Методом, аналогичным указанному в упражнении 74, найдите сумму ряда:

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$$

Для каких значений x справедливо полученное выражение?

76. Докажите равенство

$$x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Для каких значений x оно справедливо?

77. Убедитесь, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ равномерно сходится на всей числовой

оси. а) Покажите, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать на $]-\infty; \infty[$. б) Покажите, что почленное дифференцирование невозможно ни в каком промежутке.

78. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$ равномерно сходится на $[0; 1]$ и допускает на этом отрезке дифференцирование любого порядка.

79. Исходя из равенства

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x},$$

определите сумму

$$s_n = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}},$$

а затем найдите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

§ 13. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1. Функции комплексного переменного. Пусть Ω — некоторое множество комплексных чисел, и пусть каждому $z \in \Omega$ поставлено в соответствие комплексное число w , т. е. пусть задано отображение множества Ω в множество \mathbb{C} комплексных чисел. Тогда говорят, что на Ω задана *функция комплексного переменного* $w = f(z)$ (или $f: z \rightarrow w$).

Пример 13.1. Функция $w = z^2$ задана на всем множестве \mathbb{C} . Например, числу $z = 3 + 4i$ соответствует число

$$w = (3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i.$$

Числа z и w можно записать в виде $z = x + iy$, $w = u + iv$. Задание числа z равносильно заданию пары действительных чисел $(x; y)$, а задание числа w — пары действительных чисел $(u; v)$. Значит, u и v — функции от x и y . Таким образом, задание одной функции комплексного переменного $w = f(z)$ равносильно заданию двух функций от двух действительных переменных $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Пример 13.2. Так как $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, то функция $w = z^2$ равносильна паре функций $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Определим для функций комплексного переменного понятия предела, непрерывности и дифференцируемости.

О п р е д е л е н и е 13.1. Число $c = a + bi$ называется *пределом функции* $w = f(z)$, когда z стремится к z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - c| = 0$. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (z | 0 < |z - z_0| < \delta) \rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon.$$

Функция комплексного переменного $w = f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0 , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Справедливы следующие утверждения:

а) Функция комплексного переменного не может иметь двух различных пределов, когда $z \rightarrow z_0$.

б) Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$, то существует окрестность точки z_0 , в которой функция $|f(z)|$ ограничена.

в) Если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |c|$.

Остаются в силе и теоремы о пределах суммы, произведения и частного. Из них следует, в частности, что *любая целая рациональная функция*

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

непрерывна при всех значениях z , а дробно-рациональная функция

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$$

непрерывна при всех z , для которых знаменатель не обращается в нуль.

Доказательство непрерывности линейной функции $w = az$ ($a = \text{const}$) основано на определении непрерывности «на языке приращений»: функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0 , если бесконечно малому приращению аргумента $\Delta z = z - z_0$ соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. В данном случае $\Delta w = a \Delta z$, $|\Delta w| = |a| |\Delta z|$, и потому из $\Delta z \rightarrow 0$ следует, что $\Delta w \rightarrow 0$. Далее непрерывность многочлена и дробно-рациональной функции устанавливается на основании теорем о пределе произведения, суммы и частного.

2. Дифференцирование функций комплексного переменного.

О п р е д е л е н и е 13.2. Функция комплексного переменного называется *дифференцируемой* в точке z_0 , если ее приращение $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta w = A \Delta z + \alpha \Delta z, \quad (13.1)$$

где A — некоторое комплексное число и $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha = 0$.

Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , то в этой точке выполняется равенство $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = A$.

Иными словами, число A в равенстве (13.1) является *значением производной от функции f в точке z_0* . Обратно, если в точке z_0 существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то функция f дифференцируема в точке z_0 и $A = f'(z_0)$.

Пример 13.3. Функция $w = z^2$ дифференцируема при всех значениях z и $(z^2)' = 2z$.

В самом деле,

$$(z^2)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Если f — функция комплексного переменного z , причем $f(z) = u(z) + iv(z)$, то полагаем:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

При этом справедлива формула Ньютона — Лейбница:

Если $F'(z) = f(z)$, то

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

3. Функциональные последовательности и ряды в комплексной области.

Определение 13.3. Пусть $u_1(z), \dots, u_n(z), \dots$ — последовательность функций комплексного переменного, определенных в области Ω . Выражение $(U) : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется *функциональным рядом*. Если при $z_0 \in \Omega$ существует $s(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z_0)$, где $s_n(z)$ — частичная сумма ряда (U) , то говорят, что *функциональный ряд сходится в точке z_0* и его сумма равна $s(z_0)$. Множество точек, где сходится ряд (U) , называется его *областью сходимости*.

В области сходимости функциональный ряд задает новую функцию комплексного переменного — сумму этого ряда:

$$s(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(z).$$

Определение 13.4. Последовательность функций $s_1(z), \dots, s_n(z), \dots$ комплексного переменного *равномерно сходится в области Ω к функции $s(z)$* , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Omega}(s_n, s) = 0$, где положено

$\rho_{\Omega}(s_n, s) = \sup_{z \in \Omega} |s_n(z) - s(z)|$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ называется *равномерно сходящимся в Ω к функции $s(z)$* , если к $s(z)$ равномерно сходится в Ω последовательность частичных сумм этого ряда.

Остаются в силе теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, а также признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости.

Доказательства всех утверждений этого параграфа проводятся так же, как и в действительной области.

Мы не будем сейчас рассматривать понятие интеграла функции комплексного переменного и потому не останавливаемся на утверждении о почленном интегрировании рядов в комплексной области, а также на связанном с ним утверждении о почленном дифференцировании таких рядов.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение понятия предела и непрерывности функции комплексного переменного.
2. Какие функции комплексного переменного называются дифференцируемыми в точке z_0 ?
3. Справедлива ли формула Ньютона — Лейбница для функций комплексного переменного?
4. Что называется областью сходимости комплексного функционального ряда?
5. Какие теоремы о функциональных рядах остаются в силе в комплексной области?

ГЛАВА IV

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Разложение функций в степенные ряды уже рассматривалось в главе I. Мы видели, что для этой цели удобно использовать почленное интегрирование и дифференцирование. В этой главе, специально посвященной степенным рядам, будет выяснено, при каких условиях допустимы эти операции. Исследование степенных рядов целесообразно вести сразу в комплексной области, поскольку почти все утверждения, касающиеся степенных рядов в действительной области, являются частными случаями получаемых общих утверждений. Сначала исследуем вопрос об области сходимости степенных рядов.

§ 14. КРУГ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

1. Теорема Абеля.

О п р е д е л е н и е 14.1. Выражение вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где z , z_0 и c_n — комплексные числа, называется *степенным рядом в комплексной области с центром в точке z_0* .

Подстановкой $z - z_0 = w$ сводит такой ряд к частному случаю рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ (с центром в точке $w_0 = 0$). Это позволяет нам формулировать и доказывать все теоремы о степенных рядах для такого частного случая.

Т е о р е м а 14.1 (Абеля). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в некоторой точке z_0 , то он абсолютно сходится при любом z , таком, что $|z| < |z_0|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n z_0^n| = 0$. Поэтому последовательность $|c_0|$, $|c_1 z_0|$, ..., $|c_n z_0^n|$, ... ограничена, т. е. существует такое L , что $|c_n z_0^n| \leq L$ для всех n .

Возьмем теперь любое z , такое, что $|z| < |z_0|$. Тогда $|c_n z^n| = \left| c_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n} \right| = |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq L q^n$, где $q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} L q^n$ с

положительными членами сходится как геометрическая прогрессия, знаменатель которой меньше 1. Значит, сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$, а потому $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ абсолютно сходится.

С л е д с т в и е. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ расходится в точке z_0 , то он расходится во всех точках z , таких, что $|z| > |z_0|$. Доказывается от противного.

2. Область сходимости степенного ряда. Круг и радиус сходимости. Теорема Абеля позволяет найти область сходимости степенного ряда (C): $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Обозначим через X множество всех неотрицательных чисел r , для которых сходится числовой ряд (R): $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$, имеющий неотрицательные члены, а через Y — множество неотрицательных чисел r , для которых этот ряд расходится. Множество X непусто, так как $0 \in X$.

Если Y пусто, то ряд (R) сходится для всех значений r , а тогда ряд (C) абсолютно сходится для всех z — для любого z найдется такое r , что $|z| < r$, и потому $|c_n z^n| \leq |c_n| r^n$ для всех n .

Пусть теперь Y не пусто. Тогда X расположено слева от Y . В самом деле, если $r_1 \in X$, $r_2 \in Y$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r_1^n$ сходится, а тогда

$r_2 > r_1$, поскольку в противном случае сходился бы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r_2^n$ и мы имели бы, что $r_2 \in X$. Так как, кроме того, любое неотрицательное число принадлежит либо X , либо Y , то множества X и Y разделяются единственным числом ρ (иначе точки разделяющего промежутка не принадлежали бы ни X , ни Y).

Мы докажем сейчас, что для любого z , такого, что $|z| < \rho$, ряд (C) сходится, а для любого z , такого, что $|z| > \rho$, этот ряд расходится.

В самом деле, пусть $|z| < \rho$. Выберем число r , такое, что $|z| < r < \rho$. Так как $r < \rho$, то ряд (R) сходится, а в силу $|c_n z^n| \leq |c_n| r^n$ сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$, т. е. ряд (C) абсолютно сходится. Пусть теперь $|z| > \rho$. Выберем такое r , что $|z| > r > \rho$. Если бы ряд (C) сходился, то по теореме Абеля сходился бы ряд (R) и мы имели бы $r \in X$, что невозможно, так как $r > \rho$. Значит, ряд (C) расходится. Мы доказали следующее утверждение.

Т е о р е м а 14.2. Либо степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится для всех z , либо существует такое неотрицательное число ρ , что этот

ряд абсолютно сходится внутри круга $|z| < \rho$ и расходится вне этого круга (т. е. при $|z| > \rho$); что же касается точек z , лежащих на границе круга (т. е. таких, что $|z| = \rho$), то ряд может сходиться в одних из них и расходиться в других.

Если $\rho = 0$, то ряд сходится лишь при $z = 0$. Для рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n |z - z_0|^n$ область $|z| < \rho$ заменяется на $|z - z_0| < \rho$.

Итак, возможны следующие три случая:

а) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится для всех значений z .

Пример: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

б) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится лишь при $z = 0$.

Пример: $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$.

в) Существует число $\rho > 0$, такое, что ряд сходится при $|z| < \rho$ и расходится при $|z| > \rho$.

Пример: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (здесь $\rho = 1$).

Число ρ называется *радиусом сходимости* ряда (в случае а) полагают $\rho = \infty$), а область $|z| < \rho$ — *кругом сходимости* этого ряда. Если ряды рассматривают лишь для действительных значений z , то областью сходимости является пересечение круга сходимости с действительной осью, т. е. промежуток $]-\rho; \rho[$ (интервал сходимости).

Пример 14.1. Найдем область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$.

Решение. Для этого ряда:

$$u_n(x) = \frac{x^n}{2^n n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)}.$$

Применим признак Даламбера, как это делалось для аналогичной цели в примере § 10. Имеем:

$$D_n^*(x) = \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)} : \frac{|x|^n}{2^n n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{|x|}{2}.$$

$$D^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Ряд абсолютно сходится при $D^*(x) < 1$ и расходится при $D^*(x) > 1$, поэтому абсолютная сходимость имеет место, если $\left| \frac{x}{2} \right| < 1$, т. е. если $|x| < 2$. При $|x| > 2$ этот ряд расходится. Следовательно, $\rho = 2$. Исследуем ряд на концах интервала сходимости.

Пусть теперь $x = 2$. Тогда получаем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Наконец, при $x = -2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по теореме Лейбница. Область сходимости ряда — промежуток $[-2; 2]$.

Пример 14.2. Найдем область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n!}$.

Решение. Используем признак Даламбера. Имеем:

$$u_n(z) = \frac{(z+i)^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{(z+i)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$D_n^*(z) = \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|z+i|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|z+i|^n}{n!} = \frac{|z+i|}{n+1}.$$

$$D^*(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z+i|}{n+1} = 0 < 1.$$

Таким образом, исследуемый ряд абсолютно сходится при всех значениях z и $\rho = \infty$. Заметим, что рассматривался степенной ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, где $z_0 = -i$, $c_n = -\frac{1}{n!}$.

Пример 14.3. Найдем область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+9^n) z^{2n-1}.$$

Решение. Здесь

$$u_n(z) = (n+9^n) z^{2n-1}, \quad u_{n+1} = (n+1+9^{n+1}) z^{2n+1}.$$

Тогда:

$$D_n^*(z) = \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{(n+1+9^{n+1}) |z|^{2n+1}}{(n+9^n) |z|^{2n-1}} = \frac{(9^{n+1}+n+1)}{(9^n+n)} |z|^2.$$

Так как по правилу Лопиталья

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{9^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{9^x \ln 9} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} D^*(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+1}+n+1}{9^n+n} |z|^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{9^{n+1}}\right)}{9^n \left(1 + \frac{n}{9^n}\right)} |z|^2 = 9 |z|^2. \end{aligned}$$

Ряд абсолютно сходится при $D^*(z) = 9|z|^2 > 1$, т. е. в круге $|z| < \frac{1}{3}$, и расходится при $|z| > \frac{1}{3}$. Таким образом, $\rho = \frac{1}{3}$. На

границе круга сходимости $|z| = \frac{1}{3}$ и, следовательно,

$$|u_n(z)| = \frac{n+9^n}{3^{2n-1}} = (n+9^n) \frac{3}{9^n} = \left(1 + \frac{n}{9^n}\right) \cdot 3 > 3.$$

При $n \rightarrow \infty$ общий член ряда в каждой точке окружности $|z| = \frac{1}{3}$ не стремится к нулю. Итак, рассматриваемый ряд сходится только при $|z| < \frac{1}{3}$.

Пример 14.4. Найдем область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+3)^{2n}}{n^n}.$$

Решение. Используем признак Даламбера. Имеем:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{n! (x+3)^{2n}}{n^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(n+1)! (x+3)^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}}, \\ D_n(x) &= \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{(n+1)! |x+3|^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n! (x+3)^{2n}}{n^n} = \\ &= \frac{n! |x+3|^{2n+2}}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n! |x+3|^{2n}} = |x+3|^2 \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{|x+3|^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \end{aligned}$$

$$D^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+3|^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x+3|^2}{e}.$$

Ряд абсолютно сходится при $D^*(x) = \frac{|x+3|^2}{e} < 1$, т. е. если $|x+3| < \sqrt{e}$, и расходится, если $|x+3| > \sqrt{e}$. Следовательно, радиус сходимости $\rho = \sqrt{e}$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости $]-3 - \sqrt{e}; -3 + \sqrt{e}[$. Если $|x+3| = \sqrt{e}$, то $D_n^*(x) = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.

Так как $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к числу e , возрастая, то $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ и потому $D_n^* > 1$. Следовательно, при $|x+3| = \sqrt{e}$ общий член ряда не стремится к нулю, и ряд расходится. Итак, областью сходимости является интервал $]-3 - \sqrt{e}; -3 + \sqrt{e}[$.

З а м е ч а н и е. Во всех рассмотренных примерах для отыскания области сходимости степенного ряда применялся признак Даламбера, так поступают чаще всего. Может случиться, однако, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^*(z)$ не существует, и тогда признак Даламбера

не применим. Известна общая формула для радиуса сходимости степенного ряда (формула Коши — Адамара)¹. Эта формула ввиду сложности применения используется редко.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет общий член степенного ряда в действительной и комплексной области?

2. Может ли область сходимости степенного ряда в действительной области состоять из двух непересекающихся промежутков?

3. Чем отличаются области сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n$? В каком случае области сходимости этих рядов совпадают?

4. Чем отличаются области сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$ в комплексной области? В каком случае области сходимости этих рядов совпадают?

5. Годится ли метод доказательства теоремы 14.2 об области сходимости степенного ряда для практического отыскания радиуса сходимости?

6. Какой признак использовался в примерах этого параграфа для отыскания радиуса сходимости степенного ряда? Как он применялся?

7. Можно ли для отыскания области сходимости степенного ряда использовать признак Коши? В каких случаях это удобно делать?

8. Выпишите несколько первых членов в примерах 14.1—14.4 этого параграфа. В чем различие примеров 14.1 и 14.2 от примеров 14.3 и 14.4? Как это отразилось на отыскании области сходимости?

Упражнения

80. Найдите области сходимости следующих рядов в действительной области:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+2)^n}{n^n}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$;

ж) $\sum \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n 4^n}$.

81. Найдите радиус и круг сходимости следующих степенных рядов в комплексной области:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+7^n) z^n$.

¹ См.: Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1969, п. 380, т. II.

3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда.

Т е о р е м а 14.3 (о равномерной сходимости степенных рядов). *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равномерно и абсолютно сходится в любом круге вида $|z| \leq r$, целиком лежащем внутри круга сходимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < r < \rho$, тогда $r \in X$, и потому ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ сходится. Но тогда при $|z| \leq r$ имеем $|c_n z^n| \leq |c_n| r^n$, и по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равномерно и абсолютно сходится в круге $|z| \leq r$.

Для рядов в действительной области круг $|z| \leq r$ надо заменить отрезком $[-r; r]$, таким, что $r < \rho$.

Из доказанной теоремы вытекает, что *сумма степенного ряда непрерывна внутри круга сходимости*, поскольку функции $c_n z^n$ непрерывны, а любая точка круга сходимости лежит в одном из кругов $|z| \leq r$, где $r < \rho$. В частности, для действительной области сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрерывна в любой точке интервала сходимости $] -\rho; \rho[$.

Доказанное утверждение относительно непрерывности суммы степенного ряда справедливо и для рядов более общего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Важную роль в теории рядов играет вопрос о радиусе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. Этот ряд составлен из производных от членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 14.4. *Радиусы сходимости ρ и ρ_1 рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|z| < \rho_1$. Выберем такое число r_0 , что $|z| < r_0 < \rho_1$. Тогда в точке r_0 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r_0^{n-1}$ сходится. Так как $|c_n r_0^n| < |n c_n r_0^n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r_0^n|$ с неотрицательными членами, а тогда при $|z| < r_0$ сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Мы дока-

зали, что $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится внутри круга сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$, т. е. что $\rho_1 \leq \rho$.

Докажем теперь, что $\rho_1 \geq \rho$. Пусть $|z| < \rho$. Выберем такое r_1 , что $|z| < r_1 < \rho$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r_1^n$ сходится, то последовательность $|c_0|, \dots, |c_n| r_1^n + \dots$ ограничена некоторым числом L . Но

$$|n c_n z^{n-1}| = |c_n r_1^{n-1}| n \left| \frac{z}{r_1} \right|^{n-1} \leq n L_1 q^{n-1},$$

где $q = \left| \frac{z}{r_1} \right| < 1$, $L_1 = \frac{L}{r_1}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n L_1 q^{n-1}$ сходится по признаку Даламбера:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) L_1 q^n}{n L_1 q^{n-1}} \right| = q < 1$. Значит, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ сходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ сходится при $|z| < \rho$, и потому $\rho \leq \rho_1$.

Из неравенств $\rho_1 \leq \rho$ и $\rho \leq \rho_1$ получаем $\rho = \rho_1$.

Из теорем 14.3 и 14.4 получаем такое следствие.

С л е д с т в и е. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ равномерно сходится в любом круге $|z| \leq r$, целиком лежащем внутри круга сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Из этого следствия, в свою очередь, вытекает, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ непрерывна в круге $|z| < \rho$.

Пусть k — произвольное натуральное число. Применяя теорему 14.4 к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ k раз, найдем, что радиус сходимости ряда $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) c_n z^{n-k}$, составленного из производных k -го порядка членов ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, также равен ρ . Отсюда сле-

дует, что ряд $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) c_n z^{n-k}$ равномерно сходится в круге $|z| \leq r$, где $r < \rho$ и его сумма непрерывна при $|z| < \rho$.

П р и м е р 14.5. Найдем область сходимости рядов:

$$a) 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots;$$

$$\text{б) } 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots;$$

$$\text{в) } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

Решение. Ряд б) составлен из производных от членов ряда а), ряд в) составлен из производных от членов ряда б). Значит, для всех этих степенных рядов радиус сходимости один и тот же. Ряд в) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем, равным x . Он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Таким образом, $\rho = 1$.

Выясним сходимость рядов на концах общего интервала сходимости $] -1; 1[$.

При $|x| = 1$ ряд а) сходится абсолютно (проверьте это самостоятельно). Следовательно, областью сходимости ряда а) является отрезок $[-1; 1]$.

Ряд б) условно сходится при $x = -1$ и расходится при $x = 1$. Его областью сходимости является промежуток $[-1; 1[$.

Наконец, ряд в) расходится при $x = \pm 1$, его общий член при этом не стремится к нулю. Таким образом, для ряда в) областью сходимости является интервал $] -1; 1[$.

Пример показывает, что хотя для ряда, составленного из производных от членов степенного ряда, радиус сходимости остается прежним, поведение на концах интервала сходимости (или на границе круга сходимости) может быть у этих рядов различным.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие утверждения использовались при доказательстве равномерной сходимости степенного ряда в круге $|z| \leq r$ ($r < \rho$)?

2. Проведите доказательство равномерной сходимости степенного ряда в действительном случае на отрезке $[-r; r]$, где $r < \rho$.

3. Может ли сумма степенного ряда в круге его сходимости оказаться разрывной?

4. Проведите доказательство теоремы 14.4 для действительного случая.

5. Чем могут отличаться области сходимости двух степенных рядов, один из которых составлен из производных от членов другого?

6. Как сформулировать утверждения этого параграфа для степенных рядов

общего вида: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$?

7. В каком случае заведомо совпадают области сходимости степенного ряда и ряда, составленного из производных от его членов?

Упражнения

82. Найдите области сходимости следующих степенных рядов и рядов, составленных из их производных:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nz^n}{(n+1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \frac{n+1}{n}}.$$

§ 15. ПОЧЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов в действительной области. В § 12 были доказаны общие теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании функциональных рядов в действительной области. Используя равномерную сходимость степенных рядов, рассмотренную в предыдущем параграфе, легко сделать заключение о почленном интегрировании и почленном дифференцировании степенных рядов в действительной области.

Т е о р е м а 15.1. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, целиком лежащему в интервале сходимости (т. е. по любому отрезку $[a; b]$, такому, что $[a; b] \subset]-\rho; \rho[$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем такое r , что $r < \rho$ и $[a; b] \subset [-r; r]$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ равномерно сходится на $[-r; r]$, а следовательно и на $[a; b]$, и потому его можно почленно интегрировать. Из доказанной теоремы вытекает, что внутри промежутка сходимости справедливо равенство

$$\int_0^x s(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1},$$

где

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

При $x > 0$ это непосредственно следует из теоремы 12.2, где вместо $[a; b]$ рассматривается отрезок $[0; x]$. При $x < 0$, $|x| < \rho$ интегрирование проводится по отрезку $[x; 0]$, а затем обе части равенства умножаются на -1 .

Рассмотрим теперь вопрос о почленном дифференцировании степенных рядов.

Т е о р е м а 15.2. *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в действительной области можно почленно дифференцировать в любой точке, лежащей внутри интервала сходимости (иными словами, если $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,*

то $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|x_0| < \rho$. Выберем такое r_0 , что $|x_0| < r_0 < \rho$. На отрезке $[-r_0; r_0]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ равномерно сходится по следствию из теорем 14.3 и 14.4, и потому ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать в любой точке этого отрезка, в том числе и в точке x_0 .

Проведенное доказательство не годится для случая с комплексным переменным, но теорема остается справедливой.

Доказательство этого факта будет дано в следующем пункте.

К ряду, полученному в результате почленного дифференцирования степенного ряда, можно вновь применить теорему 15.2. Таким образом, легко устанавливается, что степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала (круга) сходимости любое число раз.

Пример 15.1. Найдем область сходимости степенного ряда

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n}$$

и его сумму в интервале сходимости.

Решение. Рассмотрим ряд, полученный в результате почленного дифференцирования исходного ряда:

$$1 - x + x^3 - x^5 + \dots + (-1)^n x^{2n-1} + \dots$$

Начиная со второго члена, этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $-x^2$. Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Таким образом, этот ряд, а следовательно, и исходный имеют радиус сходимости $\rho = 1$. На концах интервала сходимости при $x = \pm 1$ исходный ряд сходится по теореме Лейбница. Итак, его область сходимости — отрезок $[-1; 1]$. Обозначим через $S(x)$ сумму основного ряда. Тогда в интервале сходимости по теореме о почленном дифференцировании

$$\begin{aligned} S'(x) &= 1 - x + x^3 - x^5 + \dots + (-1)^n x^{2n-1} + \dots = 1 - \\ &- x(1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots) = 1 - \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь указанием, сделанным после теоремы 15.1, найдем:

$$\begin{aligned} S(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n} + \dots = \\ &= \int_0^x \left(1 - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Пример 15.2. Применяя почленное дифференцирование, найдем сумму степенного ряда в интервале сходимости

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + n(n+1)x^{n-1} + \dots$$

Решение. Этот ряд представляет собой результат двукратного почленного дифференцирования ряда:

$$x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1} + \dots = \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Следовательно, сумма исходного ряда равна:

$$S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Пример 15.3. Применяя дифференцирование, разложим функцию $y = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$ в ряд по степеням x .

Решение. Дифференцируя функцию, находим:

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{2-2x}{1+4x} \right)^2} \cdot \left(\frac{2-2x}{1+4x} \right)' = \frac{-2}{1+4x^2}.$$

При условии $4x^2 < 1$, т. е. при $|x| < \frac{1}{2}$, получаем разложение

$$\begin{aligned} \frac{-2}{1+4x^2} &= -2(1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + \dots + (-1)^n 4^n x^{2n} + \dots) = \\ &= -2 + 2^3 x^2 - 2^5 x^4 + 2^7 x^6 - \dots + (-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Функция $\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$ является первообразной для $\frac{-2}{1+4x^2}$, другой первообразной будет сумма ряда:

$$-2x + \frac{2^3}{3} x^3 - \frac{2^5}{5} x^5 + \frac{2^7}{7} x^7 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

Две первообразные для одной и той же функции могут отличаться только на постоянную, а потому

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} &= C - 2x + \frac{2^3}{3} x^3 - \frac{2^5}{5} x^5 + \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Для определения постоянной C положим $x = 0$. Откуда $C = \operatorname{arctg} 2$. Искомый ряд принимает вид:

$$\operatorname{arctg} 2 - 2x + \frac{2^3}{3} x^3 - \frac{2^5}{5} x^5 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} + \dots$$

Интересно отметить, что хотя интервалом сходимости этого ряда является $\left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$, сумма ряда $S(x)$ совпадает с $\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$ только при $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$. Дело в том, что $S(x)$ непрерывна на $\left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$, а $\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$ имеет разрыв при $x = -\frac{1}{4}$, а именно:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}+0} \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}-0} \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} t = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим значение суммы $S(x)$ на всем интервале сходимости $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$. При $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ $S(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$, так обе эти функции являются первообразными для $\frac{-2}{1+4x^2}$ и совпадают при $x=0$. В силу непрерывности $S(x)$ имеем:

$$S\left(-\frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}+0} S(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}+0} \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} = \frac{\pi}{2}.$$

На интервале $\left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right[$ $S(x)$ и $\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$ отличаются на некоторую постоянную. Тогда:

$$\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} + C_1 = S(x) \text{ при } x \in \left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right[.$$

Для отыскания значения C_1 перейдем к пределу при $x \rightarrow -\frac{1}{4}-0$.

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}-0} \left(\operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} + C_1 \right) = -\frac{\pi}{2} + C_1,$$

а в силу непрерывности $S(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}-0} S(x) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда $-\frac{\pi}{2} + C_1 = \frac{\pi}{2}$ и $C_1 = \pi$. Итак, при $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.

$$S(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} & \text{при } x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right[, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = -\frac{1}{4}, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x} & \text{при } x \in \left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right[. \end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании степенного ряда. Какие факты используются при ее доказательстве?

2. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенного ряда. Какой материал используется при ее доказательстве?

3. Почему теорема о почленном интегрировании степенных рядов не формулируется в комплексной области?

4. Почему приведенное в этом параграфе доказательство теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов не годится для случая с комплексными переменными?

5. Рассмотрите вновь с учетом содержания этого параграфа пример 5.11 и упражнение 38.

Упражнения

83. Найдите интервалы сходимости и суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) x^{2n-2}$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$.

84. Разложите функцию $y = \frac{1}{x^2}$ по степеням $x+1$.

У к а з а н и е. Разложите по степеням $x+1$ функцию $y_1 = -\frac{1}{x}$, а затем воспользуйтесь теоремой о почленном дифференцировании степенных рядов.

85. Разложите функцию $y = \frac{1}{(x-4)^2}$ по степеням $(x-2)$.

86. Применяя дифференцирование, разложите заданные функции по степеням x :

а) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; б) $y = \arccos(1-2x^2)$;
в) $y = (1+x) \ln(1+x)$.

2. Почленное дифференцирование рядов в комплексной области.

Теорема о почленном дифференцировании степенных рядов (теорема 15.2.) была доказана для случая действительной переменной. Приведем более общее доказательство для комплексной области.

Т е о р е м а 15.3. *Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, имеющий радиус сходимости ρ , можно почленно дифференцировать внутри круга сходимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|z_0| < \rho$. Выберем такое r , что $|z_0| < r < \rho$, и положим $\rho_1 = r - |z_0|$. Тогда для любого комплексного числа h , такого, что $|h| < \rho_1$, имеем:

$$|z_0 + h| \leq |z_0| + |h| \leq |z_0| + \rho_1 = |z_0| + r - |z_0| = r.$$

Пусть сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равна $S(z)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \frac{S(z_0 + h) - S(z_0)}{h} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n}{h} = \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} c_n ((z_0 + h)^n - z_0^n)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_n(h) &= c_n ((z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2} z_0 + \dots + \\ &\quad + (z_0 + h)^{n-k} z_0^{k-1} + \dots + z_0^{n-1}). \end{aligned}$$

Так как $|z_0| < r$ и при $|h| < \rho_1$ имеем $|z_0 + h| < r$, то

$$|v_n(h)| \leq |c_n| (|z_0 + h|^{n-1} + |z_0 + h|^{n-2} |z_0| + \dots + |z_0|^{n-1}) \leq |c_n| nr^{n-1}.$$

По теореме 14.4 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n nr^{n-1}$ сходится при $r < \rho$. Значит, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)$ равномерно сходится в круге $|h| < \rho_1$, и его сумма непрерывна в этом круге. Поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z_0^{n-1}.$$

Но тогда:

$$S'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(z_0 + h) - S(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z_0^{n-1}.$$

Так как z_0 — любая точка внутри круга сходимости, то теорема доказана.

3. Единственность разложения функции в степенной ряд. Выясним теперь, могут ли два различных степенных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ иметь одну и ту же сумму в каком-нибудь круге. Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а 15.4. Пусть функция $w = f(z)$ является в круге $|z| < \rho$ суммой степенного ряда (C): $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (15.1)$$

Тогда для любого k выполняется равенство $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, т. е. (C) является рядом Тейлора для $f(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (15.1) получаем, что $f(0) = c_0$. Далее, дифференцируя почленно это равенство (что возможно в силу теоремы 15.3), получаем соотношения

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1},$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2},$$

.....

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) z^{n-k},$$

.....

Из них находим, что

$$f'(0) = c_1, f''(0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2, \dots, f^{(k)}(0) = k! c_k, \dots,$$

и потому для любого k имеем $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Теорема доказана.

Эта теорема показывает, что если функция $f(z)$ является суммой степенного ряда, то этот ряд является ее рядом Тейлора. Однако может случиться, что функция бесконечно дифференцируема, но не раскладывается в степенной ряд с центром в некоторой точке, так как ее ряд Тейлора сходится не к ней, а к другой функции (см. пример 5.2). Такого положения не может быть, однако, для случая с комплексным переменным. Это доказывается в теории аналитических функций.

Пример 15.4. Вычислим k -ю производную функции $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0$.

Решение. Непосредственное вычисление здесь затруднительно. Воспользуемся полученным в § 5 разложением функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд по степеням x :

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots,$$

т. е.

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n, \\ \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, & \text{при } k = 2n-1. \end{cases}$$

В силу теоремы 15.4 $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Следовательно, $f^{(k)}(0) = k! a_k$.
Итак,

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n, \\ (-1)^{n-1} (2n-2)! & \text{при } k = 2n-1, \end{cases}$$

где принято соглашение считать $0! = 1$.

Пример 15.5. Разложение функции $y = \arcsin x$ в ряд по степеням x уже рассматривалось в упражнении 38. Получим теперь это разложение, дифференцируя функцию $y = \arcsin x$ и пользуясь единственностью разложения функции в степенной ряд.

Решение. Дифференцируя равенство $y = \arcsin x$ и освобождаясь от знаменателя, получаем $\sqrt{1-x^2} y' = 1$. Беря еще раз производную и опять освобождаясь от знаменателя, приходим к равенству

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0. \quad (15.2)$$

Разложение функции $y = \arcsin x$ ищем в виде:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Так как для степенных рядов допустимо почленное дифференцирование, то

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставляя эти выражения в соотношение (15.2), приходим к равенству

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0.$$

Группируя члены по степеням x , получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n) x^n = 0.$$

В силу единственности разложения функции в степенной ряд при всех $n \in \mathbf{N}$ имеет место равенство:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n^2 a_n = 0 \quad \text{или} \quad a_{n+2} = \frac{n^2 a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Следовательно, зная a_0 и a_1 , можно найти значения всех остальных коэффициентов a_n . Разложение $\arcsin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ должно совпадать с рядом Тейлора при $x_0 = 0$. Поэтому a_0 и a_1 равны значениям $\arcsin x$ и $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ при $x = 0$, т. е. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Отсюда следуют равенства:

$$a_2 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \quad \dots,$$

$$a_3 = \frac{1^2 a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}; \quad a_5 = \frac{3^2 a_3}{4 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}; \quad a_7 = \frac{5^2 a_5}{6 \cdot 7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}.$$

Методом индукции легко доказать, что

$$a_{2k+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1} = \frac{(2k-1)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

Следовательно,

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Этот способ разложения $y = \arcsin x$ оказался более трудным, чем использованный в главе I метод почленного интегрирования ряда. Более того, с помощью почленного интегрирования легко устанавливается, что разложение имеет место при $|x| < 1$, а здесь это доказывается труднее. Однако проведенный прием оказывается очень эффективным при решении многих задач (см., например, упражнение 88, а).

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается доказательство теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда для случая с комплексным переменным от доказательства этой же теоремы в действительной области, проведенного в пункте 1 этого параграфа?

2. Может ли быть использовано в действительной области доказательство теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда для случая с комплексным переменным?

3. На чем основано доказательство теоремы о единственности разложения функции в степенной ряд?

4. Рассмотрите еще раз пример 5.2. Какую роль он играет?

Упражнения

87. Вычислите k -ю производную функции $y = \arcsin x$ при $x = 0$.

88. Разложите заданные функции в ряд по степеням x

а) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = \arcsin^2 x$.

§ 16. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1. **Показательная функция в комплексной области.** В главе I было доказано, что в действительной области справедливо разложение

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Положим по определению, что для комплексных чисел

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (16.1)$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0 < 1,$$

то ряд (16.1) абсолютно сходится для всех z . По теореме 15.3 его можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$\begin{aligned} (e^z)' &= 1' + z' + \frac{(z^2)'}{2!} + \dots + \frac{(z^n)'}{n!} + \dots = 0 + 1 + \frac{2z}{2!} + \dots + \\ &+ \frac{nz^{n-1}}{n!} + \dots = 1 + z + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^z. \end{aligned}$$

Итак, формула $(e^z)' = e^z$ является справедливой и в комплексной области.

Докажем, что в комплексной области остается верной и формула

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$$

(теорема сложения для показательной функции).

В самом деле, так как ряд (16.1) абсолютно сходится при всех значениях z , то можно применить теорему об умножении абсолютно сходящихся рядов (см. теорему 8.4). Получаем, что

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots\right) \left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \dots + \dots + \frac{w^n}{n!} + \dots\right) = 1 + (z + w) + \left(\frac{z^2}{2!} + zw + \frac{w^2}{2!}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{z^n}{n!} + \dots + \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{w^k}{k!} + \dots + \frac{w^n}{n!}\right) + \dots = \\ &= 1 + (z + w) + \frac{1}{2!}(z^2 + 2zw + w^2) + \dots + \frac{1}{n!}(z^n + \dots + \\ &+ \frac{n!}{(n-k)!k!} z^{n-k} w^k + \dots + w^n) + \dots = 1 + (z + w) + \\ &+ \frac{1}{2!}(z + w)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(z + w)^n + \dots = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Из доказанной теоремы следует, что $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, и потому $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. Значит, функция e^z ни при каком значении z не обращается в нуль. В самом деле, если бы имело место равенство $e^{z_0} = 0$, то мы получили бы, что

$$1 = e^{z_0 - z_0} = e^{z_0} \cdot e^{-z_0} = 0 \cdot e^{-z_0} = 0.$$

2. Тригонометрические функции в комплексной области. Формулы Эйлера. Функции $\sin z$ и $\cos z$ тоже определяются как суммы степенных рядов:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (16.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots, \quad (16.3)$$

полученных из разложений функций $\sin x$ и $\cos x$ по степеням x в действительной области (см. гл. I) с помощью замены x на комплексное число z . Ряды (16.2) и (16.3) также сходятся при всех значениях z . При этом $\cos(-z) = \cos z$, так как все члены в ряде (16.3) имеют четные степени, а $\sin(-z) = -\sin z$. Для функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$ остаются справедливыми формулы дифференцирования

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Например,

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)' = 1 - \frac{3z^2}{3!} + \frac{5z^4}{5!} - \dots = \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \cos z. \end{aligned}$$

Заменим в разложении (16.1) переменную z на iz .

Получим, что

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \dots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Итак, мы доказали формулу

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (16.4)$$

из которой следует, что

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z. \quad (16.5)$$

Складывая равенства (16.4) и (16.5) и деля на 2, получаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (16.6)$$

Аналогично выводится равенство

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (16.7)$$

Формулы (16.4) — (16.7) называют *формулами Эйлера*. Они устанавливают связь между показательной и тригонометрическими функциями в комплексной области.

Из формулы (16.4) вытекает, что

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

При $z = 2\pi i$ получаем, что $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. Значит, для любого z имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$$

Таким образом, *показательная функция имеет в комплексной области период $2\pi i$* .

Связь между показательной и тригонометрическими функциями позволяет просто доказывать различные тождества для тригонометрических функций.

Пример 16.1. Возводя равенство $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ в куб, получаем, что, с одной стороны,

$$\begin{aligned} e^{3xi} &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x), \end{aligned}$$

с другой стороны, $e^{3xi} = \cos 3x + i \sin 3x$. Поэтому имеем:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x,$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Точно так же можно получить общие формулы для $\cos nx$ и $\sin nx$, выражающие их в виде многочленов от $\cos x$ и $\sin x$.

Пример 16.2. Установим формулу Муавра

$$(\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Решение. Действительно, поскольку $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, то

$(\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, что и требовалось доказать.

Пример 16.3. Разложим в ряд по степеням x функции $y = e^x \cos x$ и $y = e^x \sin x$.

Решение. Имеем:

$$e^x \cos x + ie^x \sin x = e^x (\cos x + i \sin x) = e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}.$$

Используя определение e^z , найдем:

$$e^x \cos x + ie^x \sin x = e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n, \quad (16.8)$$

при этом, как и ранее, полагаем $0! = 1$.

Преобразуем с помощью формулы Муавра величину $(1+i)^n$. Имеем:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Тогда:

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} \right).$$

Подставляя это выражение в формулу (16.8), находим:

$$e^x \cos x + ie^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} \right)}{n!} x^n.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в левой и правой частях равенства, окончательно получаем:

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos n \frac{\pi}{4}}{n!} x^n,$$

$$e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin n \frac{\pi}{4}}{n!} x^n.$$

Пример 16.4. Убедимся в справедливости формулы

$$\cos(z+t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t.$$

Решение. Воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos(z+t) = \frac{e^{i(z+t)} + e^{-i(z+t)}}{2} = \frac{e^{iz} e^{it} + e^{-iz} e^{-it}}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\cos z + i \sin z)(\cos t + i \sin t) + (\cos z - i \sin z)(\cos t - i \sin t)}{2} = \\
&= \frac{(\cos z \cos t - \sin z \sin t) + i(\sin z \cos t + \cos z \sin t)}{2} + \\
&+ \frac{(\cos z \cos t - \sin z \sin t) - i(\sin z \cos t + \cos z \sin t)}{2} = \cos z \cos t - \sin z \sin t,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 16.5. Докажем, что

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Решение. Заменим в формуле для $\cos(z + t)$ значение t на $-t$. Получим:

$$\cos(z - t) = \cos(z + (-t)) = \cos z \cos(-t) - \sin z \sin(-t).$$

В силу четности $\cos z$ и нечетности $\sin t$ найдем:

$$\cos(z - t) = \cos z \cos t + \sin z \sin t,$$

тем самым попутно выведена формула для косинуса разности аргументов. Положим в полученной формуле $t = z$. Тогда $\cos(z - z) = \cos 0 = 1$, и, следовательно, требуемое равенство получено.

Пример 16.6. *Гиперболические функции.* Так называются функции

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\
\operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}
\end{aligned}$$

(гиперболические косинус, синус, тангенс, котангенс); функции $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ определены на всей комплексной плоскости, а $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ там, где соответственно $\operatorname{ch} z$ или $\operatorname{sh} z$ не обращались в нуль.

Покажем, что

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z,$$

$$\operatorname{ch}(iz) = \cos z, \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z.$$

Решение. Воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z,$$

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z.$$

Таким образом, первые две формулы установлены. Применим их для проверки остальных. Заменим в доказанных формулах z на iz . Получим:

$$\cos(i(iz)) = \operatorname{ch} iz, \quad \sin(i(iz)) = i \operatorname{sh} iz.$$

Но $i(iz) = -z$, и тогда в силу четности косинуса и нечетности синуса найдем:

$$\operatorname{ch} iz = \cos(-z) = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = \frac{1}{i} \sin(-z) = -\frac{1}{i} \sin z = i \sin z.$$

Этим доказательство формул завершено.

Пример 16.7. Выделим действительную и мнимую части функции $w = \cos z$ в комплексной области.

Решение. Пусть $z = x + iy$, где x и y действительные числа. Имеем:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Это и есть искомое разложение.

Вопросы для самоконтроля

1. По какой причине функции $w = e^z$, $w = \cos z$, $w = \sin z$, определяемые с помощью степенных рядов, совпадают на действительной оси с известными ранее функциями e^x , $\cos x$, $\sin x$ в действительной области?

2. В какой части комплексной плоскости определены функции $w = e^z$, $w = \cos z$, $w = \sin z$ и почему?

3. На каком основании делается заключение, что функции $w = e^z$, $w = \cos z$, $w = \sin z$ непрерывны во всей комплексной плоскости?

4. На чем основан вывод формул для производных функций $w = e^z$, $w = \cos z$, $w = \sin z$?

5. Каким образом устанавливается четность косинуса и нечетность синуса в комплексной области?

6. Каким методом доказывается формула $e^{z+t} = e^z \cdot e^t$ в комплексной области?

7. Какой метод используется для вывода формул Эйлера?

8. Как производится выделение действительной и мнимой части величины e^z в комплексной плоскости?

9. Почему $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$?

10. Как доказывается, что функция $w = e^z$ не имеет корней в комплексной плоскости?

Упражнения

89. Разложите в ряды по степеням x следующие функции:

а) $e^{x \operatorname{ctg} a} \cos x$; б) $e^{x \operatorname{ctg} a} \sin x$.

90. Выведите формулы:

а) $\sin(z \pm t) = \sin z \cos t \pm \cos z \sin t$;

б) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$;

в) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

в комплексной плоскости.

91. Выделите действительную и мнимую части функции $w = \sin z$ в комплексной плоскости.

92. Выделите действительную и мнимую части чисел:

а) $\cos(6 + 7i)$; б) $\cos(4 + i)$; в) $\sin 8i$; г) $e^{(1+i)^2}$.

93. Выпишите разложения функций $w = \operatorname{ch} z$ и $w = \operatorname{sh} z$ в ряды по степеням z .

94. Докажите, что $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

95. Выведите формулы:

a) $\operatorname{ch}(z \pm t) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} t \pm \operatorname{sh} z \operatorname{sh} t$;

б) $\operatorname{sh}(z \pm t) = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} t \pm \operatorname{ch} z \operatorname{sh} t$;

в) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;

г) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z$;

д) $\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$.

96. Начертите графики гиперболического косинуса и гиперболического синуса в действительной области.

97. Докажите, что

a) $|\cos z| = |\cos(x + iy)| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$;

б) $|\sin z| = |\sin(x + iy)| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$.

98. Ограничены ли модули функций $\sin z$ и $\cos z$?

99. Для каких z $\sin z$ и $\cos z$ принимают действительные значения?

100. Можно ли степенные ряды, определяющие e^z , $\cos z$, $\sin z$, принять за определение функций $y = e^x$, $y = \cos x$, $y = \sin x$ в действительной области? Какие бы при этом появились преимущества перед обычным методом и какие бы возникли трудности?

§ 17. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ РЯДОВ

1. Вычисление значений функций и интегралов. Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций.

П р и м е р 17.1. Вычислим $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001. По формуле 5.6 имеем:

$$e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2!} + \frac{(0,2)^3}{3!} + \frac{(0,2)^4}{4!} + \dots$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов, начиная с пятого:

$$\begin{aligned} r_4 &= \frac{(0,2)^4}{4!} + \frac{(0,2)^5}{5!} + \frac{(0,2)^6}{6!} + \dots = \frac{(0,2)^4}{4!} \left(1 + \frac{0,2}{5} + \frac{(0,2)^2}{5 \cdot 6} + \dots \right) < \\ &< \frac{(0,2)^4}{4!} \left(1 + \frac{0,2}{5} + \left(\frac{0,2}{5} \right)^2 + \dots \right) = \frac{0,0016}{24} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,2}{5}} < 0,0001. \end{aligned}$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем:

$$e^{0,2} = 1 + 0,2 + \frac{(0,2)^2}{2!} + \frac{(0,2)^3}{3!} = 1 + 0,2 + \frac{0,04}{2} + \frac{0,008}{6} \approx 1,2213.$$

С помощью степенных рядов можно находить приближенные значения интегралов.

П р и м е р 17.2. Найдём с точностью до 0,0001 значение интеграла

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Заменяя функцию $\sin x$ ее степенным рядом и почленно инте-

грируя, находим:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right) \Big|_0^{0,5} = 0,5 - \frac{0,125}{18} + \frac{0,03125}{600} - \dots$$

Получился знакочередующийся ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{0,03125}{600} < 0,0001$, то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,5 - \frac{0,125}{18} \approx 0,4931.$$

2. Вычисление пределов. Степенные ряды могут быть использованы при вычислении пределов.

Пример 17.3. Найдём:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}.$$

Решение. Так как

$$(1+x+x^2)(1-x+x^2) = 1+x^2+x^4 = \frac{1-x^6}{1-x^2},$$

соответственно

$$\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2) = \ln(1-x^6) - \ln(1-x^2),$$

то искомый предел равен:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^6) - \ln(1-x^2)}{x(e^x-1)}.$$

Разложим функции, входящие в числитель и знаменатель этой дроби, в ряды по степеням x . Имеем:

$$\ln(1-x^6) = -x^6 - \frac{x^{12}}{2} - \frac{x^{18}}{3} - \dots,$$

$$\ln(1-x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \dots,$$

и потому

$$\ln(1-x^6) - \ln(1-x^2) = x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^6 + \dots$$

Кроме того,

$$x(e^x-1) = x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$$

Теперь легко найти, что

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x(e^x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^6 + \dots}{x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^4 + \dots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots} = 1. \end{aligned}$$

3. Метод последовательных приближений. Этот вопрос не относится к теме «Степенные ряды», но рассматривается здесь, чтобы сосредоточить в одном месте различные приложения рядов.

Приближенное решение уравнений вида $x = f(x)$ во многих случаях удается осуществить следующим образом. Выбираем какое-нибудь приближенное значение x_0 корня уравнения и подставляем его вместо x в правую часть равенства. Находим значение $x_1 = f(x_0)$. Затем вычисляем $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ и функция $f(x)$ непрерывна, то, переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$, получаем, что $c = f(c)$,

т. е. что c — корень искомого уравнения.

Описанный метод оказывается пригодным лишь при некоторых дополнительных требованиях, предъявляемых к функции $f(x)$.

О п р е д е л е н и е 17.1. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, называется *сжимающей*, если

а) образ отрезка $[a; b]$ является подмножеством этого отрезка: $f([a; b]) \subset [a; b]$;

б) существует такое число q , что $0 < q < 1$, и для любых чисел x_1 и x_2 из $[a; b]$ выполняется неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| \leq q|x_2 - x_1|$.

Отметим, что в силу теоремы Лагранжа условие б) выполняется, если функция $f(x)$ дифференцируема на $[a; b]$, причем $\sup_{x \in [a; b]} |f'(x)| < 1$.

В самом деле, в этом случае для любых x_1 и x_2 из $[a; b]$ имеем:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)(x_2 - x_1)| \leq q|x_2 - x_1|,$$

где $q = \sup_{x \in [a; b]} |f'(x)|$.

Т е о р е м а 17.1. Если непрерывная функция $f(x)$ является сжимающей на отрезке $[a; b]$, то на $[a; b]$ существует единственное число c , такое, что $c = f(c)$. Это число является пределом последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, где x_0 — любая точка отрезка $[a; b]$ и $x_{n+1} = f(x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числа $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \dots$ являются частичными суммами ряда:

$$(X): x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) + \dots$$

Докажем, что этот ряд абсолютно сходится. В самом деле, для любого n имеем:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}|.$$

Значит, для всех n выполняется неравенство $|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|$, где $0 < q < 1$, и по признаку сравнения рядов с неотрицательными членами ряд:

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + \dots + |x_{n+1} - x_n| + \dots$$

сходится, а тогда ряд (X) абсолютно сходится.

Обозначим через c сумму ряда (X). Тогда $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Докажем, что $c = f(c)$. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ и учитывая, что в силу непрерывности $f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$, получаем $c = f(c)$.

Нам осталось доказать, что на отрезке $[a; b]$ нет иных решений уравнения $x = f(x)$, кроме $x = c$. Если предположить, что d — такое решение, т. е. что $d = f(d)$ и $d \neq c$, то мы имели бы

$$|d - c| = |f(d) - f(c)| < q |d - c|,$$

где $q < 1$, $d \neq c$, чего не может быть.

Пример 17.4. Решим уравнение $x = 2 + \sqrt[4]{x}$ с точностью до 0,001.

Здесь $f(x) = 2 + \sqrt[4]{x}$. Так как $f(1) = 2 + \sqrt[4]{1} = 3 > 1$, $f(4) = 2 + \sqrt[4]{4} \approx 3,4 < 4$, то уравнение имеет корень на отрезке $[1; 4]$. На этом отрезке $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \leq \frac{1}{4} < 1$ и, кроме того, $f([1; 4]) \subset [1; 4]$.

Поэтому можно применить метод последовательных приближений. Положим $x_1 = 4$. Тогда $x_2 = f(4) \approx 3,4142$.

Продолжая этот процесс, находим, что $x_4 \approx 3,3538$, $x_5 \approx 3,3532$.

Абсолютная погрешность δ при замене корня уравнения приближенным значением x_4 равна:

$$|(x_5 - x_4) + (x_6 - x_5) + \dots| \leq |x_5 - x_4| + |x_6 - x_5| + \dots \leq |x_5 - x_4| (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{|x_5 - x_4|}{1 - q}.$$

В рассматриваемом случае

$$\delta_4 = \frac{0,0007}{1 - \frac{1}{4}} < 0,001.$$

Итак, с точностью до 0,001 корень уравнения равен 3,353. Других корней уравнение не имеет.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие приложения степенных рядов рассмотрены в этом параграфе?
2. Задачи, подобные рассмотренной в примере 17.1, разбирались в § 4. В чем различие оценок погрешностей, примененных в § 4 и при решении задачи 17.1?

3. Если бы в задаче, аналогичной разобранной в примере 17.1, ряд оказался бы рядом лейбнического типа, то как можно было бы упростить выбор числа членов ряда, которые нужно сохранить для получения ответа с заданной точностью?

4. На чем основан метод приближенного вычисления интеграла, примененный в примере 17.2?

5. На каком основании в примере 17.3 записано:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^4 + \dots}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots} = 1?$$

6. Какая функция $f(x)$ называется сжимающей на отрезке $[a; b]$?

7. Почему сжимающая функция обеспечивает сходимость последовательности (x_n) , определяемой рекуррентным соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$?

8. Почему в условии теоремы 17.1 существенно требование непрерывности функции $f(x)$?

9. В решении примера 17.4 указано, что $f([1; 4]) \subset [1; 4]$. Почему это так?

Упражнения

101. Докажите, что в приближенном равенстве $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

при $|x| \leq 1$ погрешность меньше, чем $\frac{x^6}{720}$. Пользуясь указанной формулой, найдите приближенные значения $\cos 1$, $\cos 0,1$. Оцените погрешность в каждом случае.

102. Вычислите $\cos 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

У к а з а н и е. 18° соответствует $\frac{\pi}{10}$ радиан; $\frac{\pi}{10} \approx 0,31416$.

103. Вычислите $\ln 1,4$ с точностью до 0,0001.

104. Вычислите $\ln 3$ с точностью до 0,0001.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь разложением функции $\ln \frac{1+x}{1-x}$ по степеням x .

105. Докажите, что

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

С помощью этого тождества вычислите π с точностью до 0,00001.

106. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{20}$ с точностью до 0,001.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь равенством

$$\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{2^4 + 4} = \sqrt[4]{2^4 \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}};$$

б) $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,001;

в) $\sqrt[3]{30}$ с точностью до 0,0001;

г) $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001;

д) $\sqrt[5]{250}$ с точностью до 0,001.

107. Вычислите приближенное значение определенных интегралов, взяв

два члена разложения подынтегральной функции. Оцените получившиеся при этом погрешности:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \sin x^2 dx.$$

108. Вычислите интегралы с точностью до 0,001:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx; \quad \text{б) } \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx; \\ \text{д) } \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad \text{е) } \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{dx}{x^2}; \quad \text{ж) } \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+t)}{t} dt. \end{aligned}$$

109. Вычислите с точностью до 0,001 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

У к а з а н и е. Используйте замену $t = \frac{1}{x}$.

110. Вычислите пределы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \cos x}{\sin x \cdot x^3} - \frac{3}{x^4} \right); \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right); \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

111. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь заменой $t = \frac{1}{x}$.

112. Решите уравнение $10x - 1 - \cos x = 0$ с точностью до 0,001.

113. Найдите действительный корень уравнения $x - \frac{1}{4+x^2} = 0$ с точностью до 0,001.

114. Найдите действительный корень уравнения $x^5 - x - 1 = 0$ в интервале $]1; 2[$ с точностью до 0,001.

У к а з а н и е. Убедитесь, что на отрезке $[1; 2]$ уравнение имеет корень и притом единственный. Запишите уравнение в виде $x = \sqrt[5]{x+1}$ и проверьте возможность применения используемого метода.

115. Вычислите корни указанных уравнений с точностью до 0,001:

а) $x^2 = \sin x$; б) $x^2 = e^x + 2$.

ГЛАВА V

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 18. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

1. Введение. Чтобы функцию $y = f(x)$ можно было разложить в степенной ряд по степеням $x - a$, необходима ее бесконечная дифференцируемость в точке a . Например, функцию $y = |x|$ нельзя разложить в ряде по степеням x , так как она недифференцируема в точке $x = 0$. Кроме того, функции $y = x^n$ непериодичны, и потому неудобно строить по ним разложение периодических функций.

В этом и следующих параграфах будут рассмотрены разложения периодических функций в ряды по гармоническим колебаниям, т. е. по функциям вида $y = A \sin(\omega x + \alpha)$. Такие функции имеют период $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Если функция, которую нужно разложить, имеет период $2l$, то естественно потребовать, чтобы и гармоники $A \sin(\omega x + \alpha)$ имели тот же период, т. е. чтобы $2l$ было кратно $\frac{2\pi}{\omega}$, $2l = \frac{2\pi n}{\omega}$. В этом случае $\omega = \frac{\pi n}{l}$, и потому $y = A \sin\left(\frac{\pi n x}{l} + \alpha\right)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Итак, мы будем рассматривать разложения функций, имеющих период $2l$, в ряды вида:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l} + \alpha\right). \quad (18.1)$$

Эти ряды принимают наиболее простую форму, если $l = \pi$:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \alpha). \quad (18.2)$$

Общий случай сводится к случаю $l = \pi$ подстановкой $x = \frac{lt}{\pi}$. Если функция $y = f(x)$ имеет период $2l$, то функция $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ имеет период 2π :

$$\varphi(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t).$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай, когда $l = 2\pi$, указывая изменения, необходимые для перехода к общему случаю.

Разложение (18.2) можно записать иначе, воспользовавшись формулой $\sin(\omega x + \alpha) = \sin \alpha \cos \omega x + \cos \alpha \sin \omega x$. Если положить $A_n \sin \alpha = a_n$, $A_n \cos \alpha = b_n$, $A_0 = \frac{a_0}{2}$, то получаем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (18.3)$$

Еще одну запись этого разложения получаем, используя формулы Эйлера:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n i) e^{inx} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i) e^{-inx}. \end{aligned}$$

Если обозначить $\frac{1}{2} (a_n - b_n i)$ через c_n , $\frac{1}{2} (a_n + b_n i)$ через c_{-n} , а $\frac{a_0}{2}$ через c_0 , то это разложение можно представить в виде ряда, бесконечного в двух направлениях:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (18.4)$$

Для такого ряда частичные суммы определяются следующим образом:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Обратно, если задан ряд вида (18.4) и $c_{-n} = \bar{c}_n$, где \bar{c}_n — число, комплексно сопряженное числу c_n , то, заменяя в нем e^{inx} на $\cos nx + i \sin nx$ и группируя члены, получим ряд вида (18.3), где $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n - c_{-n}$, $b_n = i(c_n + c_{-n})$. От этого ряда легко перейти к ряду вида (18.2), учитывая, что

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \alpha_n), \quad (18.5)$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin \alpha_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \cos \alpha_n = \frac{b_n}{A_n}. \quad (18.6)$$

Далее рассмотрим следующие вопросы:

1. Какие периодические функции можно представить в виде сумм тригонометрических рядов?

2. Как вычислить коэффициенты тригонометрического ряда для данной функции?

Для этого необходимо ввести ряд понятий.

2. Скалярное произведение функций. В аналитической геометрии мы строили разложение произвольных векторов по системе

попарно ортогональных нормированных векторов $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3$. При этом коэффициенты a_1, a_2, a_3 вычислялись по формулам $a_k = (\mathbf{a}, \mathbf{i}_k)$, $k = 1, 2, 3$. Длина вектора \mathbf{a} выражается через его координаты a_1, a_2, a_3 равенством

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

а скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i}_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3$ и $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i}_1 + b_2 \mathbf{i}_2 + b_3 \mathbf{i}_3$ равно:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Чтобы использовать такой же «геометрический» язык для функций, надо определить для них сначала понятие скалярного произведения. Мы будем рассматривать функции, принимающие не только действительные, но и комплексные значения.

О п р е д е л е н и е 18.1. Скалярное произведение двух функций f и g , заданных на отрезке $[a; b]$, определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (18.7)$$

Здесь и далее мы рассматриваем лишь кусочно непрерывные функции (см. с. 135). Так как произведение двух таких функций тоже кусочно непрерывная функция, то для любых двух таких функций скалярное произведение определено.

Это скалярное произведение обладает теми же свойствами, что и скалярное произведение векторов:

а) Для любой функции f имеем $(f, f) \geq 0$; если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $(f, f) = 0$, то $f(x) = 0$ для всех x этого отрезка.

В самом деле, $f(x) \overline{f(x)} = |f(x)|^2 \geq 0$, и потому

$$(f, f) = \int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx \geq 0.$$

Если $(f, f) = 0$, то $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$, а интеграл от непрерывной неотрицательной функции может быть равен нулю лишь в случае, когда эта функция равна нулю. Значит, $|f(x)|^2 = 0$ для всех x из отрезка $[a; b]$, и потому $f(x) = 0$ на этом отрезке.

б) Для любых двух функций выполняется равенство

$$(f, g) = (\overline{g}, f).$$

В самом деле, $\overline{g(x) \overline{f(x)}} = f(x) \overline{g(x)}$, и потому

$$(\overline{g}, f) = \int_a^b \overline{g(x) \overline{f(x)}} dx = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = (f, g).$$

Отметим, что если функции f и g принимают действительные значения, то $(\overline{g}, f) = (g, f)$, и потому $(f, g) = (g, f)$.

в) Для любых функций f_1, f_2, g и чисел λ, μ выполняется равенство

$$(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda (f_1, g) + \mu (f_2, g).$$

В самом деле, по свойствам определенного интеграла

$$\begin{aligned} (\lambda f_1 + \mu f_2, g) &= \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)) \overline{g(x)} dx = \\ &= \lambda \int_a^b f_1(x) \overline{g(x)} dx + \mu \int_a^b f_2(x) \overline{g(x)} dx = \\ &= \lambda (f_1, g) + \mu (f_2, g). \end{aligned}$$

3. Ортонормированные системы функций. Два вектора в трехмерном евклидовом пространстве ортогональны в том и только в том случае, когда их скалярное произведение равно нулю. Поэтому введем следующие определения:

О п р е д е л е н и е 18.2. Функции f и g , заданные на отрезке $[a; b]$, называются *ортогональными на этом отрезке*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = 0.$$

О п р е д е л е н и е 18.3. Число $\sqrt{(f, f)}$ называют *нормой* функции f и обозначают $\|f\|$. Если $\|f\| = 1$, то функцию f называют *нормированной на $[a; b]$* .

Таким образом, норма функции — аналог длины вектора, а нормированная функция — аналог орта. Для нормированных функций

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 1.$$

О п р е д е л е н и е 18.4. Система функций $\{f_n(x), a \leq x \leq b, n \in N\}$ (конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если функции этой системы попарно ортогональны. Если при этом для всех n функции f_n нормированы, то система функций $\{f_n\}$ называется *нормированной*.

Ортогональная и нормированная система функций обычно называется сокращенно *ортонормированной системой функций*.

Итак, система функций $\{f_n(x), a \leq x \leq b, n \in N\}$ ортонормирована, если для любых m и n , где $m \neq n$, имеем $(f_m, f_n) = 0$ и для любого n имеем $(f_m, f_n) = 1$.

Эти условия можно записать так:

$$\int_a^b f_m(x) \overline{f_n(x)} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Если система функций $\{f_n\}$ не является нормированной, то ее можно нормировать, заменив каждую функцию $f_n(x)$ функцией

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)}{\|f_n\|}.$$

В самом деле,

$$\|\varphi_n\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) = \left(\frac{f_n}{\|f_n\|}, \frac{f_n}{\|f_n\|} \right) = \frac{1}{\|f_n\|^2} (f_n, f_n) = 1.$$

Пример 18.1. Система функций $\{e^{inx}, n \in \mathbf{Z}\}$ ортогональна, но не нормирована на отрезке $[0; 2\pi]$.

В самом деле, если $m \neq n$, то

$$\begin{aligned} (e^{imx}, e^{inx}) &= \int_0^{2\pi} e^{imx} \overline{e^{inx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \\ &= \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i(m-n)} (e^{2\pi i(m-n)} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Далее,

$$(e^{inx}, e^{inx}) = \int_0^{2\pi} |e^{inx}|^2 dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Отсюда видно, что для нормирования функций данной системы надо разделить каждую из них на $\sqrt{2\pi}$.

Точно так же доказывается, что система функций $\{e^{inx}, n \in \mathbf{Z}\}$ ортогональна на любом отрезке вида $[a; a + 2\pi]$.

Пример 18.2. Система функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ ортогональна на отрезке $[0; 2\pi]$ (и на любом отрезке вида $[a; a + 2\pi]$).

Для доказательства заметим, что по формулам Эйлера

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(m+n)x} + e^{i(m-n)x} + e^{i(n-m)x} + e^{-(m+n)x}). \end{aligned}$$

Если $m \neq n$, то по примеру 18.1 интегралы от всех слагаемых по отрезку $[0; 2\pi]$ равны нулю, а потому при $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0.$$

Точно так же доказывается, что при $m \neq n$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0,$$

а также что при любых m и n выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0.$$

Далее, как известно,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Поэтому нормированная система функций имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется скалярным произведением функций f и g на отрезке $[a; b]$?
2. Перечислите свойства скалярного произведения функций. Какие свойства скалярного произведения векторов они напоминают?
3. Какие две функции называются ортогональными на отрезке $[a; b]$?
4. Какие функции называют нормированными на отрезке $[a; b]$?
5. Какие системы функций называют ортонормированными на отрезке $[a; b]$?
6. Приведите примеры ортонормированных систем функций.

Упражнения

116. Вычислите скалярное произведение функций f и g на отрезке $[a; b]$:
- a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = e^x$, $a = -1$, $b = 2$;
 - б) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $a = -3$, $b = 3$;
 - в) $f(x) = x^2 + ix$, $g(x) = x^2 - i$, $a = -1$, $b = 4$;
 - г) $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin 4x$, $a = 0$, $b = \pi$.
117. Подберите значения λ и μ так, чтобы функция $f(x) = x^2 + \lambda x + \mu$ была ортогональна функциям 1 и x на отрезке $[-1; 1]$.
118. С помощью интегрирования по частям докажите, что многочлены $\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)^2$ и $\frac{d^3}{dx^3}(x^2 - 1)^3$ ортогональны на отрезке $[-1; 1]$.
119. При каком λ функция $\lambda \cos x$ нормирована на отрезке $[0; \pi]$?

§ 19. КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ. РЯД ФУРЬЕ

1. Коэффициенты Фурье. Пусть система функций $\{\varphi_n\}$ ортогональна на отрезке $[a; b]$, причем все функции этой системы ограничены в совокупности по модулю некоторым числом M : $|\varphi_n(x)| \leq M$. Возьмем абсолютно сходящийся ряд $\sum_n a_n$ и образуем функциональный ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$. Так как для любого $x \in [a; b]$ имеем $|a_n \varphi_n(x)| \leq M|a_n|$ и ряд $\sum_n M|a_n|$ по условиям сходится, то ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ по признаку Вейерштрасса абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[a; b]$ к некоторой функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x). \quad (19.1)$$

Выразим через $f(x)$ коэффициенты a_n . Для этого умножим обе части равенства (19.1) на функцию $\overline{\varphi_k(x)}$:

$$f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \sum_n a_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_k(x)}. \quad (19.2)$$

Так как функция φ_k ограничена на отрезке $[a; b]$, ряд в правой части равенства (19.2) равномерно сходится, и поэтому полученное равенство можно почленно проинтегрировать по отрезку $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx = \sum_n a_n \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_k(x)} dx.$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$(f, \varphi_k) = \sum_n a_n (\varphi_n, \varphi_k). \quad (19.3)$$

В силу ортогональности системы $\{\varphi_n\}$ для всех n , отличных от k , имеем $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$. Поэтому все члены суммы (19.3), кроме соответствующего $n = k$, обращаются в нуль, и значит, $(f, \varphi_k) = a_k (\varphi_k, \varphi_k)$. Отсюда получаем, что

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}. \quad (19.4)$$

Если система функций $\{\varphi_n\}$ не только ортогональна, но и нормирована, то $\|\varphi_k\| = 1$ и формула (19.4) принимает вид:

$$a_k = (f, \varphi_k) \quad (19.5)$$

(сравните с формулой для координат вектора). Заменяя скалярное произведение интегралами, запишем формулу (19.5) в виде:

$$a_k = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx \quad (19.5')$$

(предоставляем читателю записать формулу для a_k в случае, когда система функций $\{\varphi_n\}$ не нормирована).

Пусть система $\{\varphi_n\}$ ортонормирована, а функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют вид:

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad g(x) = \sum_n b_n \varphi_n(x),$$

причем ряды $\sum_n a_n$ и $\sum_n b_n$ абсолютно сходятся. Тогда:

$$f(x) \overline{g(x)} = \sum_k a_k \varphi_k(x) \cdot \sum_n \overline{b_n \varphi_n(x)},$$

причем оба ряда в правой части равенства абсолютно сходятся при любом x . По теореме об умножении абсолютно сходящихся рядов отсюда вытекает, что

$$f(x) \overline{g(x)} = \sum_{k, n} a_k \overline{b_n} \varphi_k(x) \overline{\varphi_n(x)}, \quad (19.6)$$

причем члены ряда можно располагать в любом порядке.

Поскольку ряд $\sum_{k, n} a_k \overline{b_n}$ абсолютно сходится (см. теорему 8.4), а модули произведений $\varphi_k(x) \overline{\varphi_n(x)}$ при любом x и любых k и n

ограничены числом M^2 , ряд в (19.6) равномерно сходится по признаку Вейерштрасса, и его можно почленно интегрировать по отрезку $[a; b]$. Записывая интегралы в виде скалярных произведений, получаем, что

$$(f, g) = \sum_{k, n} a_k \overline{b_n} (\varphi_k, \varphi_n).$$

Так как $(\varphi_k, \varphi_n) = 0$, если $k \neq n$ и $(\varphi_k, \varphi_k) = 1$, то получаем равенство

$$(f, g) = \sum_k a_k \overline{b_k}. \quad (19.7)$$

В частности,

$$\|f\|^2 = \sum_k a_k \overline{a_k} = \sum_k |a_k|^2. \quad (19.8)$$

Эта формула является аналогом формулы квадрата длины вектора.

Выше мы вывели формулы для коэффициентов ряда $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ через его сумму. При этом предполагалось, что ряд абсолютно и равномерно сходится к функции $f(x)$. Если задана некоторая функция $f(x)$, то заранее неизвестно, является ли она суммой такого ряда. Тем не менее для любой кусочно непрерывной функции $f(x)$, $a \leq x \leq b$, и любой ортогональной на $[a; b]$ системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ можно формально определить коэффициенты

$$a_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx}{\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx} \quad (19.9)$$

и построить ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$.

О п р е д е л е н и е 19.1. Числа $a_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ называются *коэффициентами Фурье* функции f по ортогональной системе функций $\{\varphi_n\}$, а ряд $\sum_n a_n \varphi_n(x)$ — *рядом Фурье* этой функции по заданной системе.

В общем случае мы не можем утверждать, что ряд Фурье данной функции сходится к ней. Вопрос о сходимости ряда Фурье к разлагаемой функции решается на основе изучения свойств ортонормированной системы и разлагаемой функции. Мы изучим ниже этот вопрос для тригонометрической системы функций.

2. Коэффициенты Фурье для тригонометрических систем функций. Применим формулу (19.9) к тригонометрической системе функций. Система функций $\{e^{inx}\}$ на любом отрезке $[a; a + 2\pi]$, как было показано выше, ортогональна, но не нормирована:

$(e^{inx}, e^{inx}) = 2\pi$. Поэтому:

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (19.10)$$

Ряд Фурье функции $f(x)$, $a \leq x \leq a + 2\pi$ по системе $\{e^{inx}\}$ имеет вид $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, где c_n задаются формулами (19.10).

Точно так же выводятся формулы для коэффициентов Фурье в случае, когда тригонометрическая система функций взята в виде $1, \cos x, \sin x, \dots$. В этом случае

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (19.11)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx, \quad (19.12)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (19.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (19.14)$$

Если вместо отрезка $[a; a + 2\pi]$ взять отрезок $[a; a + 2l]$, то формулы (19.12) — (19.14) заменяются более общими:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) dx, \quad (19.15)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (19.16)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (19.17)$$

а ряд Фурье принимает вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (19.18)$$

Пример 19.1. Вычислим коэффициенты Фурье функции $y = x^2$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Мы имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} - \frac{2 \sin nx}{n^3} + \frac{2x \cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2 \cos nx}{n^3} + \frac{2x \sin nx}{n^2} \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}.$$

Значит, ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right).$$

Сумма этого ряда равна x^2 лишь внутри промежутка $]0; 2\pi[$. На всей числовой оси он сходится не к функции $y = x^2$, а к функции, получаемой из $y = x^2$, $0 < x < 2\pi$, периодическим продолжением с периодом 2π . В точках вида $x = 2n\pi$ ряд, как будет показано ниже, сходится к значению $2\pi^2$.

Вопросы для самоконтроля

1. При каких предположениях в отношении ортогональной системы функций $\{\varphi_n\}$ доказана формула (19.4) для коэффициентов Фурье? Удовлетворяет ли этим условиям тригонометрическая система функций?

2. Запишите выражение скалярного произведения функций через коэффициенты Фурье. Для каких функций имеет место это выражение?

3. Какими формулами выражаются коэффициенты Фурье по тригонометрической системе функций?

Упражнения

120. Вычислите коэффициенты Фурье функции x^3 по системе $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$. Вычислите коэффициенты Фурье той же функции по системе функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

121. Вычислите коэффициенты Фурье функции $|x(\pi - x)|$ по системе функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ на отрезке $[-\pi; \pi]$.

122. Докажите, что система функций

$$P_n(x) = ((1 - x^2)^n)^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ортогональна на отрезке $[-1, 1]$, причем

$$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 \, dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{2n+1}.$$

Вычислите коэффициенты Фурье функции $x^4 - x + 1$, $-1 \leq x \leq 1$, по системе функций $P_n(x)$.

§ 20. ЛЕММА РИМАНА

1. **Кусочно гладкие функции.** Прежде всего напомним определение кусочно непрерывной функции. Функция $f(x)$, заданная на $[a; b]$, называется *кусочно непрерывной*, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков: $[a_0; a_1], [a_1; a_2], \dots,$

$[a_{n-1}; a_n](a_0=a, a_n=b)$, таких, что функция $f(x)$ непрерывна во всех внутренних точках $[a_k; a_{k+1}]$ и имеет конечные пределы:

$$f(a_k + 0) = \lim_{x \rightarrow a_k, x > a_k} f(x), \quad f(a_k - 0) = \lim_{x \rightarrow a_k, x < a_k} f(x).$$

Периодическая функция называется кусочно непрерывной, если она кусочно непрерывна на отрезке, длина которого равна периоду.

Будем обозначать через $f_k(x)$ следующую функцию:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } a_k < x < a_{k+1}, \\ f(a_k + 0), & \text{если } x = a_k, \\ f(a_{k+1} - 0), & \text{если } x = a_{k+1}. \end{cases}$$

Таким образом, все функции $f_k(x)$ непрерывны на соответствующих отрезках $[a_k; a_{k+1}]$. Отметим также, что функция $f(x)$, кусочно непрерывная на $[a; b]$, интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x) dx.$$

Аналогично определяется кусочно непрерывная функция на интервале или полуоткрытом промежутке. Сохраняется формула для вычисления определенного интеграла, поскольку величина правой части написанного выражения не зависит от значений функции в точках $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$.

Существуют примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых расходятся на бесконечном множестве точек. Поэтому, чтобы гарантировать сходимость ряда Фурье по тригонометрической системе функций, надо наложить на разлагаемую функцию более сильные ограничительные требования, чем кусочная непрерывность, и тем более — непрерывность.

О п р е д е л е н и е 20.1. Функция $f(x)$, имеющая период $2l$, называется *кусочно гладкой*, если существует такое разбиение отрезка $[-l; l]$ на отрезки $[a_k; a_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, что каждая из функций $f_k(x)$, $0 \leq k \leq n-1$, имеет на отрезке $[a_k; a_{k+1}]$ непрерывную производную второго порядка (в точках a_k и a_{k+1} речь идет об односторонних производных).

П р и м е р 20.1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right], \\ 1 & \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ x^2 & \text{при } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$$

является кусочно гладкой. Здесь отрезок $[-\pi; \pi]$ разбивается на отрезки $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. При этом

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= x \\ f_1'(x) &= 1 \\ f_1''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right],$$

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= 1 \\ f_2'(x) &= 0 \\ f_2''(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\left. \begin{aligned} f_3(x) &= x^2 \\ f_3'(x) &= 2x \\ f_3''(x) &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ при } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

Рассмотрим функцию $\varphi_1(x) = x$. Она определена, непрерывна, имеет непрерывные производные $\varphi_1'(x) = 1$, $\varphi_1''(x) = 0$ на всей числовой оси (существенна лишь непрерывность $\varphi(x)$ и ее производных на каком-либо интервале, содержащем $\left[-\pi; \frac{\pi}{2} \right]$) и при

$-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ совпадает с $f(x)$. Отсюда и следует, что на $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$ $\varphi_1(x) = f_1(x)$, $\varphi_1'(x) = f_1'(x)$, $\varphi_1''(x) = f_1''(x)$, т. е. $f_1(x)$, $f_1'(x)$, $f_1''(x)$ являются сужением $\varphi_1(x)$, $\varphi_1'(x)$, $\varphi_1''(x)$ на $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

Разумеется, при этом сохраняется непрерывность. Откуда $f(-\pi + 0) = f_1(-\pi) = -\pi$, $f\left(-\frac{\pi}{2} - 0\right) = f_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Мы рассмотрели случай $k = 1$. Точно так же рассматриваются случаи $k = 2$ и $k = 3$.

Проверка кусочной гладкости функции в этом примере не вызвала затруднений потому, что для каждого k мы могли сразу указать нужную функцию $\varphi_k(x)$, заданную на интервале, содержащем $[a_k; a_{k+1}]$, непрерывную вместе с производными (это легко усматривалось из ее аналитического выражения) и совпадающую с $f(x)$ на отрезке $[a_k; a_{k+1}]$. В более сложных случаях такая простая проверка кусочной гладкости не удастся, и тогда может быть полезно следующее предложение: *если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a_k} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a_k} f'_k(x)$, то он равен $f'_k(a_k)$ и, таким образом,*

$f'_k(x)$ непрерывна в точке a_k .

В самом деле, $f'_k(a_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} \frac{f_k(x) - f_k(a_k)}{x - a_k}$.

Но по теореме Лагранжа найдется такое c , что

$$\frac{f_k(x) - f_k(a_k)}{x - a_k} = f'_k(c) = f'(c), \text{ и потому } f'_k(a_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} f'(x).$$

Аналогично доказывается, что если существует $\lim_{\substack{x \rightarrow a_k \\ x > a_k}} f''(x)$, то он равен $f''_k(a_k)$.

2. Лемма Римана. В теории рядов Фурье важную роль играет следующая лемма:

Л е м м а Р и м а н а. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную, то при любом значении α выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(n + \alpha)x dx = 0. \quad (20.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в равенстве (20.1) $f(x) = u$, $\sin(n + \alpha)x dx = dv$ и произведем интегрирование по частям. Так как

$$\begin{aligned} du &= f'(x) dx, \\ v &= \int \sin(n + \alpha)x dx = -\frac{\cos(n + \alpha)x}{n + \alpha}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin(n + \alpha)x dx &= -\frac{f(x) \cos(n + \alpha)x}{n + \alpha} \Big|_a^b + \\ &+ \frac{1}{n + \alpha} \int_a^b f'(x) \cos(n + \alpha)x dx. \end{aligned}$$

Так как $|\cos(n + \alpha)x| \leq 1$, то из полученного равенства вытекает, что

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(n + \alpha)x dx \right| \leq \frac{1}{|n + \alpha|} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right),$$

а потому имеет место соотношение (20.1).

Из доказанной леммы следует, что если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi; \pi]$ и этот отрезок можно разбить на конечное число частей, на каждом из которых $f(x)$ имеет непрерывную производную, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n + \alpha)x dx = 0.$$

Достаточно применить лемму Римана к каждому отрезку.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется кусочно непрерывной?
2. В каком случае о периодической функции говорят, что она кусочно непрерывна?

3. Что такое кусочно гладкая функция?
4. Будет ли кусочно гладкая функция кусочно непрерывной?
5. Как вычисляется определенный интеграл от кусочно непрерывной функции?
6. У непрерывной или кусочно непрерывной функции изменили значения в конечном числе точек. Осталась ли функция кусочно непрерывной? Изменится ли значение интеграла?
7. Какие сведения из теории определенного интеграла используются для доказательства леммы Римана?
8. Справедлива ли лемма Римана для кусочно гладкой функции? Какова роль в решении этого вопроса метода вычисления интеграла для кусочно непрерывной функции?

Упражнения

123. Будут ли кусочно гладкими следующие функции:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } f(x) &= \begin{cases} -x & \text{при } x \in]-\pi; 0], \\ \frac{x^2}{\pi} & \text{при } x \in]0; \pi]; \end{cases} & \text{б) } f(x) &= \begin{cases} x & \text{при } x \in [-\pi; 0[, \\ \pi & \text{при } x \in [0; \pi]; \end{cases} \\
 \text{в) } f(x) &= \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \in [-1; 1], x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0; \end{cases} \\
 \text{г) } f(x) &= \frac{\sin x}{x}, \quad x \in]0; 1]; \\
 \text{д) } f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-2; 0[, \\ \frac{1}{2}x & \text{при } x \in [0; 2]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В чем различие решения этого вопроса для случаев а), б), д), с одной стороны, и в), г) — с другой?

124. Вычислите определенный интеграл по $[-\pi; \pi]$ для функций: а) из примера 20.1; б) из упражнения 123, а.

125. Докажите, что произведение двух кусочно непрерывных функций есть кусочно непрерывная функция.

126. Докажите, что произведение двух кусочно гладких функций является кусочно гладкой функцией.

§ 21. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

1. **Формула для частичных сумм ряда Фурье.** Чтобы исследовать вопрос о сходимости рядов Фурье к разлагаемым функциям, нам понадобится формула для частичных сумм ряда Фурье, т. е. ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \text{ где}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (21.1)$$

Заменим в сумме

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (21.2)$$

коэффициенты c_k их выражениями (21.1). Мы получим, что

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt.$$

Но сумма, стоящая под знаком интеграла, — геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{i(x-t)}$. По формуле суммы геометрической прогрессии имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} &= \frac{e^{in(x-t)} e^{i(x-t)} - e^{-in(x-t)}}{e^{i(x-t)} - 1} = \frac{e^{i(n+1)(x-t)} - e^{-in(x-t)}}{e^{i(x-t)} - 1} = \\ &= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}}{e^{\frac{i}{2}(x-t)} - e^{-\frac{i}{2}(x-t)}}.\end{aligned}$$

(мы разделили числитель и знаменатель на $e^{\frac{i}{2}(x-t)}$). По формуле

Эйлера это выражение равно
$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}}.$$

Значит,
$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} dt. \quad (21.3)$$

Функция $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$ имеет период 2π . Предполагая, что и $f(t)$

периодическая с периодом 2π , пределы интегрирования в формуле (21.3) можно заменить на $x-\pi$ и $x+\pi$. Сделаем теперь подстановку $x-t=z$:

$$\begin{aligned}s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(x-z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} f(x-z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}} dz \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+z) + f(x-z)) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}} dz \quad (21.4)\end{aligned}$$

(в первом слагаемом сделана подстановка $z = -t$).

Нам понадобится в дальнейшем формула

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z}{\sin \frac{z}{2}} dz = 1. \quad (21.5)$$

Чтобы доказать ее, заметим, что

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z}{\sin \frac{z}{2}} = \sum_{k=-n}^n e^{ikz}.$$

Проинтегрируем обе части равенства от $-\pi$ до π и примем во внимание, что $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikz} dz = 0$, если $k \neq 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z}{\sin \frac{z}{2}} dz = \int_{-\pi}^{\pi} dz = 2\pi.$$

Так как функция $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z}{\sin \frac{z}{2}}$ четная, то

$$2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z}{\sin \frac{z}{2}} dz = 2\pi.$$

Равенство (21.5) доказано.

2. Сходимость разложения кусочно гладких функций в ряды Фурье. Перейдем теперь к доказательству теоремы, дающей достаточные условия для того, чтобы ряд Фурье функции $f(x)$, имеющей период 2π , сходиллся к этой функции.

Т е о р е м а 21.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет период 2π и является кусочно гладкой. Тогда ее ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 числовой оси к значению

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Так как в точках, где функция $f(x)$ непрерывна, $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то из этой теоремы следует, что ряд Фурье кусочно гладкой функции сходится к ней во всех точках непрерывности этой функции. Отметим, что все встречающиеся при решении практических задач функции с периодом 2π удовлетворяют условиям теоремы.

Доказательство. Умножим обе части равенства (21.5) на $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ и вычтем из соответствующих частей равенства (21.4), где x заменено на x_0 (так как $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ не зависит от z , это выражение можно внести под знак интеграла по z):

$$\begin{aligned} s_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2 \sin \frac{z}{2}} \times \\ \times \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) z dz. \end{aligned} \quad (21.6)$$

Чтобы доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}, \quad (21.7)$$

осталось показать, что интеграл в правой части (21.6) стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. Это утверждение будет следовать из леммы Римана, если мы покажем, что функции

$$\psi(z) = \frac{f(x_0+z)-f(x_0+0)}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

и

$$\chi(z) = \frac{f(x_0-z)-f(x_0-0)}{2 \sin \frac{z}{2}}$$

удовлетворяют условию этой леммы, так как тогда им будет удовлетворять и функция

$$\varphi(z) = \psi(z) + \chi(z) = \frac{f(x_0+z)+f(x_0-z)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2 \sin \frac{z}{2}}.$$

Итак, надо доказать, что отрезок $[0; \pi]$ можно разбить на конечное число частей так, чтобы на каждой из них функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$ имели непрерывную производную. Мы проведем доказательство для функции $\psi(z)$, поскольку для $\chi(z)$ оно проводится аналогично.

По условию отрезок $[0; \pi]$ можно разбить на конечное число частей, на которых функция $f(x_0+z)$ имеет непрерывную производную второго порядка. На тех частях отрезка, которые не содержат точку $z=0$, имеет непрерывную производную второго порядка и функция $\psi(z)$. Поэтому все свелось к доказательству того, что существуют пределы $\lim_{z \rightarrow +0} \psi(z)$ и $\lim_{z \rightarrow +0} \psi'(z)$ (как было по-

казано выше, тогда существует и односторонняя производная $\psi'(+0)$, причем $\psi'(z)$ непрерывна в точке $z=0$).

Но по правилу Лопиталя:

$$\lim_{z \rightarrow +0} \psi(z) = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{f(x_0+z) - f(x_0+0)}{2 \sin \frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{f'(x_0+z)}{\cos \frac{z}{2}} = f'(x_0+0).$$

Далее:

$$\psi'(z) = \frac{2 \sin \frac{z}{2} f'(x_0+z) - (f(x_0+z) - f(x_0+0)) \cos \frac{z}{2}}{4 \sin^2 \frac{z}{2}},$$

и потому по правилу Лопиталя:

$$\lim_{z \rightarrow +0} \psi'(z) = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{2 f''(x_0+z) + \frac{1}{2} (f(x_0+z) - f(x_0+0))}{4 \cos \frac{z}{2}} = \frac{f''(x_0+0)}{2}.$$

Тем самым существование обоих пределов, а значит, и равенство (21.7) доказаны.

3. Разложение функций, заданных на конечных промежутках, в ряд Фурье. Пусть на промежутке $]-\pi; \pi]$ задана кусочно гладкая функция $f(x)$. Продолжим ее периодически на всю числовую ось с периодом 2π . К полученной функции применима теорема 21.1. Сумма полученного ряда Фурье сходится на промежутке $]-\pi; \pi[$ к значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ (в частности к $f(x)$ в точках непрерывности функции f). В точках же $x = \pm \pi$ ряд Фурье сходится к значению $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$ (в силу периодичности $f(-\pi+0) = f(\pi+0)$ и $f(-\pi-0) = f(\pi-0)$).

Разумеется, все сказанное выше переносится без изменений на функции, имеющие период $2l$, заданные на $]-l; l]$.

4. Разложение четных и нечетных функций в ряды Фурье. Пусть функция $f(x)$ имеет период 2π и четна. Тогда ее ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (21.8)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (21.9)$$

В самом деле, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$. Так как функция $f(x)$ четна, а $\sin nx$ нечетна, то произведение $f(x) \sin nx$ нечетно, а по-

тому интеграл равен нулю. Далее,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Так как функция $f(x)$ и $\cos nx$ четны, то и функция $f(x) \cos nx$ четна, а тогда:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Точно так же доказывается, что разложение в ряд Фурье нечетной функции, имеющей период 2π , таково:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (21.10)$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (21.11)$$

Для четных функций с периодом $2l$ эти формулы принимают следующий вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (21.12)$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx. \quad (21.13)$$

Соответственно, для нечетных функций

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (21.14)$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx. \quad (21.15)$$

Отметим, что ряд Фурье (21.12) в точках 0 и l сходится к значениям $f(0)$ и $f(l)$, а ряд Фурье (21.14) сходится в этих точках к значению 0.

5. Примеры разложения функций в ряды Фурье.

Пример 21.1. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 2π и заданную на $[-\pi; \pi[$ выражением x^2 (рис. 6).

Решение. Данная функция является четной. В самом деле, на интервале $]-\pi; \pi[$ имеем $(-x)^2 = x^2$, а $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ в силу периодичности. Поэтому разложение в ряд Фурье имеет вид

(21.8), причем коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (21.9)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

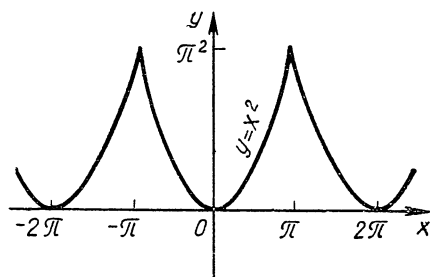


Рис. 6

Далее, используя формулы 120 и 93 Приложения I к «Интегральному исчислению»¹, получаем:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $\sin n\pi = 0$, а $\cos n\pi = (-1)^n$).

Значит, искомое разложение имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \frac{4}{2^2} \cos 2x - \frac{4}{3^2} \cos 3x + \frac{4}{4^2} \cos 4x - \dots \quad (21.16) \end{aligned}$$

На рисунке 7 изображены графики первых трех частичных сумм ряда (21.16). Мы видим, как они приближаются к графику функции $f(x) = x^2$.

З а м е ч а н и е 1. В примере 19.1 было получено разложение в ряд Фурье функции, имеющей период 2π и заданной на промежутке $[0; 2\pi[$ выражением x^2 . Это разложение отлично от полученного в рассматриваемом случае. Дело в том, что разлагаемые функции совпадают на $[0; \pi]$ и отличны друг от друга на $[-\pi; 0]$. А именно функция примера 19.1 при $-\pi \leq x < 0$ принимает значения $(x + 2\pi)^2$ (поскольку в этом случае $0 \leq x + 2\pi < 2\pi$, а на $[0; 2\pi[$ функция задана выражением x^2). Функция же примера 21.1 при $-\pi \leq x < 0$ принимает значение x^2 .

З а м е ч а н и е 2. Тот же ответ (21.16) получился бы, если бы требовалось получить разложение функции x^2 на отрезке $[-\pi; \pi]$.

При частных значениях x из этого разложения получаем любопытные соотношения. Если положить $x = 0$, то, поскольку $f(x) =$

¹ Виленкин Н. Я., Кунцкая Е. С., Мордкович А. Г. Математический анализ. Интегральное исчисление. М., 1979.

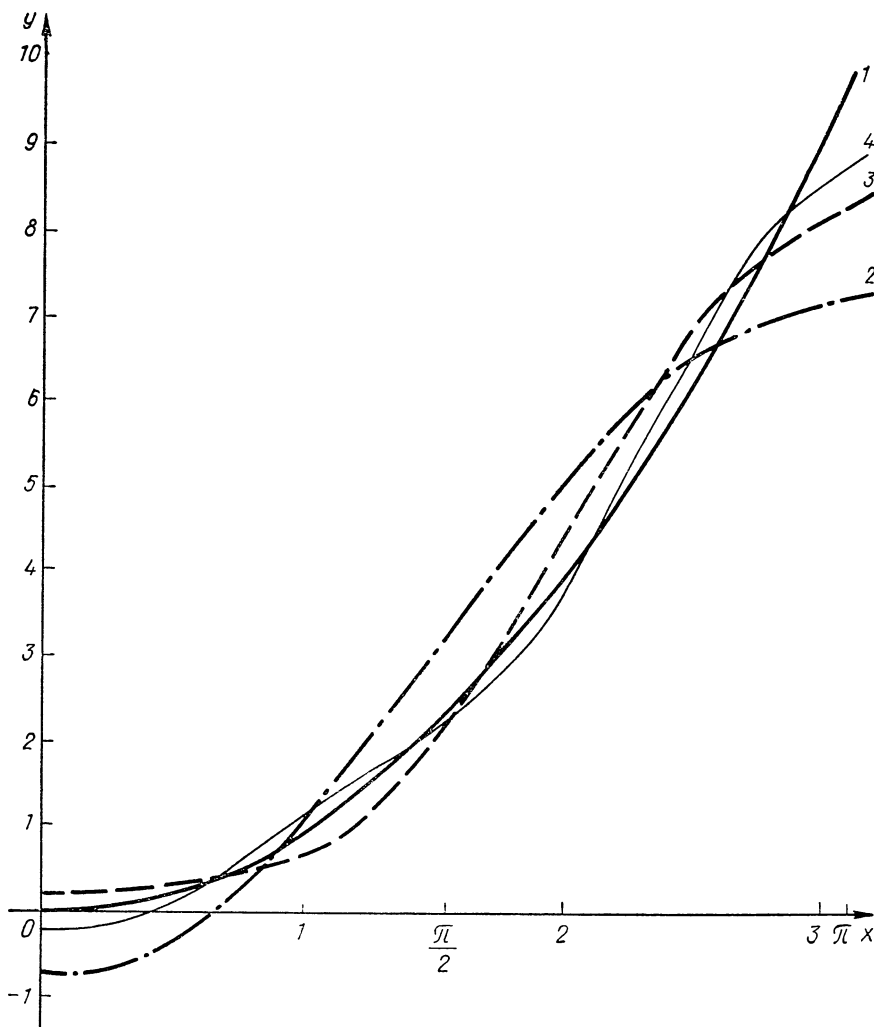


Рис. 7

$= 0^2 = 0$, $\cos 0 = 1$, имеем:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 + \frac{4}{2^2} - \frac{4}{3^2} + \frac{4}{4^2} - \dots,$$

и потому

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}. \quad (21.17)$$

Если же положить $x = \pi$ и принять во внимание, что $f(\pi) = \pi^2$

и $\cos n\pi = (-1)^n$, получаем:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 + \frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{4^2} + \dots,$$

и потому

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (21.18)$$

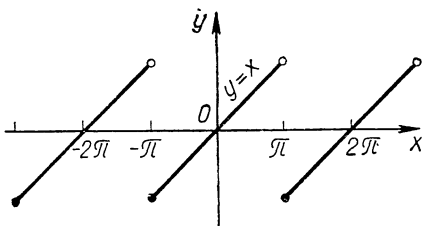


Рис. 8

Подчеркнем, что при тех значениях x , которые не принадлежат промежутку $[-\pi; \pi[$, сумма ряда (21.16) равна не x^2 , а функции, полученной путем периодического продолжения с промежутка $[-\pi; \pi[$. Эта функция на $[\pi (2n - 1); \pi (2n + 1)[$ принимает значение $(x - 2n\pi)^2$. Поэтому, например, если в ряд (21.16) подставить вместо x значение $\frac{17}{3}\pi$, то получим не $\left(\frac{17}{3}\pi\right)^2$, а $\left(\frac{17}{3}\pi - 6\pi\right)^2 = \frac{\pi^2}{9}$.

Пример 21.2. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 2π и заданную на $[-\pi; \pi[$ выражением x (рис. 8).

Решение. Поскольку $f(-x) = -x = -f(x)$, то данная функция является нечетной, и потому ее разложение в ряд Фурье имеет вид (21.10), причем ее коэффициенты выражаются следующей формулой

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx.$$

Используя формулу 93 Приложения I к «Интегральному исчислению», получаем:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Значит,

$$f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right). \quad (21.19)$$

Если в (21.19) положить $x = \pi$, то правая часть ряда обратится в нуль. Поскольку в точке π функция $f(x)$ имеет разрыв (см. рис. 8), то в соответствии с теоремой 21.1 сумма ряда Фурье должна равняться

$$\frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2}.$$

Так как $f(\pi - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} x = \pi$ и $f(\pi + 0) = f(-\pi + 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\pi \\ x > -\pi}} x = -\pi$, то $\frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$ в согласии с упомянутой теоремой.

Пример 21.3. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 2π и заданную на $[-\pi; \pi[$ выражением $\frac{x^2}{2} - x$.

Решение. Искомое разложение сразу получается из разложений, полученных в предыдущих двух примерах:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \frac{4}{2^2} \cos 2x - \frac{4}{3^2} \cos 3x + \dots \right) - 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right).$$

Предоставляем читателю найти этот ответ непосредственным вычислением коэффициентов Фурье по формулам (19.12) и (19.14).

Пример 21.4. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 2π и заданную на $[-\pi; \pi[$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ \frac{x^2}{\pi} & \text{при } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 9.

Решение. Так как данная функция задана различными выражениями на участках $[-\pi; 0[$ и $[0; \pi[$, то при вычислении ее коэффициентов Фурье надо разбить промежутки интегрирования в формулах (19.12) — (19.14) на указанные участки (то обстоятельство, что получаются интегралы не по отрезкам, а по полуоткрытым промежуткам, роли не играет, так как интеграл функции не изменяется от изменения ее значения в одной точке).

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-x) dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^3}{3\pi} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{5}{6} \pi. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx dx +$$

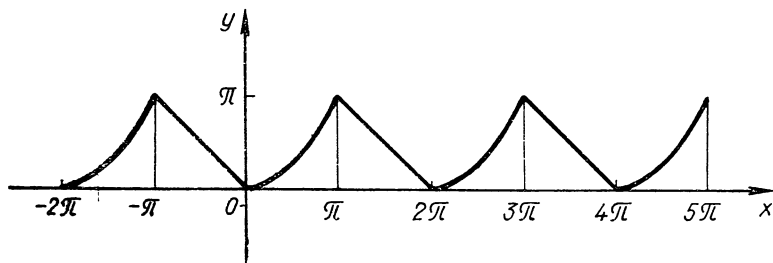


Рис. 9

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} - \frac{2}{n} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2} + \frac{(-1)^n}{\pi n^2} + \frac{2(-1)^n}{\pi n^2} = \\
& = \frac{-1 + 3(-1)^n}{\pi n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{2}{\pi n^2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \frac{x^2}{\pi} \sin nx \, dx \right) = \\
&= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi^2} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \right. \\
&+ \left. \frac{2}{n} \left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \sin nx}{n} \right) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^3} - \frac{2}{\pi^2 n^3} = \\
&= \frac{2(-1 + (-1)^n)}{\pi^2 n^3} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 n^3}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{5}{12} \pi - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{\pi^2} \sin x + \frac{1}{2\pi} \cos 2x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x - \\
&- \frac{4}{27\pi^2} \sin 3x + \dots
\end{aligned}$$

Пример 21.5. Разложим в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 6 и заданную на $[-3; 3]$ выражением $\frac{x}{3}$.

Решение. В данном случае период равен $2l$, где $l = 3$. Так как заданная функция нечетна, то по формулам (21.14) и (21.15) получаем, что

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{3},$$

где

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{x}{3} \sin \frac{n\pi x}{3} \, dx = \frac{2}{9} \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{3}}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2} - \frac{x \cos \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \right) \Big|_0^3 = \\
&= -\frac{2 \cdot 3 \cdot (-1)^n}{9 \cdot \frac{n\pi}{3}} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите выражение для n -й частичной суммы ряда Фурье в виде интеграла.

2. Докажите формулу

$$\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}}.$$

3. Докажите, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}} dz = 1.$$

4. На каком этапе доказательства равенства (21.5) используется четность

функции $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)z}{\sin \frac{z}{2}}?$

5. Запишите выражение разности $s_n(x_0) - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ через интеграл.

6. Почему доказательство теоремы 21.1 сводится к доказательству гладкости функций

$$\psi(z) = \frac{f(x_0+z) - f(x_0+0)}{2 \sin \frac{z}{2}} \text{ и } \chi(x) = \frac{f(x_0-z) - f(x_0-0)}{2 \sin \frac{z}{2}}?$$

7. Как доказывается существование пределов $\lim_{z \rightarrow +0} \psi(z)$ и $\lim_{z \rightarrow +0} \psi'(z)$?

8. Как производится разложение функции, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$, в ряд Фурье по $\cos nx$ и $\sin nx$?

9. Как производится разложение функции, заданной на отрезке $[-l; l]$, в ряд Фурье по $\cos \frac{n\pi x}{l}$ и $\sin \frac{n\pi x}{l}$?

10. Какая замена переменных сводит случаи $[-\pi; \pi]$ и $[-l; l]$, о которых идет речь в вопросах 8 и 9, друг к другу?

11. Как раскладывается функция, заданная на $[0; l]$, в ряд по $\cos \frac{n\pi x}{l}$?

12. Как раскладывается функция, заданная на $[0; l]$, в ряд по $\sin \frac{n\pi x}{l}$?

13. Две кусочно гладкие функции совпадают на $[0; l]$, но их разложение в ряд Фурье различно. Что это означает?

Упражнения

127. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{при } x \in [-\pi; 0[, \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{при } x \in [0; \pi]. \end{cases}$$

128. Найдите ряд Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0; \pi[, \\ \cos x & \text{при } x \in [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

В каких точках сумма ряда Фурье не совпадает со значениями функции? Чему равна сумма ряда Фурье в этих точках?

129. Найдите ряд Фурье функции, заданной на промежутке $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{при } x \in [-\pi; 0[, \\ \frac{\pi}{4} & \text{при } x \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Как нужно переопределить $f(x)$, чтобы ее ряд Фурье сходил к ней уже во всех точках рассматриваемого промежутка?

130. Разложите в ряды Фурье следующие функции:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = |x|$, заданные на отрезке $[-\pi; \pi]$. Имеются ли точки на $[-\pi; \pi]$, в которых сумма какого-либо из этих рядов Фурье не совпадает с соответствующим значением функции?

131. Найдите ряд Фурье функции, заданной на промежутке $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [-\pi; 0[, \\ \pi & \text{при } x \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Чему равна сумма ряда Фурье в точках $x = 0$, $x = -\pi$, $x = \pi$?

132. С помощью результатов, полученных при решении упражнений 130 и 131, докажите, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{8}, \\ \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{12}, \\ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Рассмотрите значения сумм этих рядов при $x = 0$.

133. Найдите ряд Фурье с периодом, равным 4, для функции, заданной на промежутке $[-2; 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-2; 0[, \\ 2 & \text{при } x \in [0; 2]. \end{cases}$$

Выясните, в каких точках отрезка $[-2; 2]$ полученный ряд не сходится к $f(x)$. Чему в этих точках равна сумма ряда Фурье?

134. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию $f(x) = \cos x$, рассматриваемую только на отрезке $[0; \pi]$.

135. Разложите функцию $f(x) = \sin x$, рассматриваемую на отрезке $[0; 2\pi]$,

в ряд по косинусам (т. е. по $\cos \frac{n\pi x}{l} = \cos \frac{n\pi x}{2\pi} = \cos \frac{nx}{2}$).

Ответы к упражнениям

1. а) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{4}{3}, a_3 = \frac{9}{8}, a_4 = \frac{8}{15}, a_5 = \frac{25}{144}$; б) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{7}, a_4 = \frac{3}{13}, a_5 = \frac{4}{21}$; в) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{32}, a_3 = -\frac{1}{32}, a_4 = \frac{3}{128}, a_5 = -\frac{1}{64}$; г) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{5}, a_3 = \frac{1}{10}, a_4 = \frac{3}{17}, a_5 = \frac{1}{26}$; д) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{35}, a_4 = \frac{1}{16}, a_5 = \frac{1}{99}$.

2. $a_1 = 1, a_9 = \frac{1}{25}, a_{15} = \frac{1}{121}, a_{17} = \frac{2}{153}$.

3. $a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2n+1}, a_{2n} = \left(\frac{2n}{6n-1}\right)^{4n-1}, a_{3n-1} = \left(\frac{3n-1}{9n-4}\right)^{3(2n-1)}, a_{n^2} = \left(\frac{n^2}{3n^2-1}\right)^{2n^2-1}$.

4. $a_{n+2} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+4)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n+5)}, a_{n+m} = (-1)^{n+m-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \times \times (3n+3m-2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \times \times (4n+4m-3)}, a_{mn} = (-1)^{mn-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3mn-2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4mn-3)}, a_{n^2} = (-1)^{n^2-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n^2-2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n^2-3)}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{3n+1}{4n+1}$.

5. $(a_n)^2 = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{2n}, (a_n)^3 + 1 = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{3n} + 1, \sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{2n-1}$.

6. а) $\frac{1}{4n-3}$; б) $(-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$; в) $(-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$; г) $(-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$; д) $\frac{2^n}{n!}$; е) $(-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} (n \geq 2)$.

7. а) $a_1 = \frac{7}{5}, a_n = -\frac{8}{5^n} (n \geq 2), s = 1$; б) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, s = 1$.

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$.

9. а) $s_n = \frac{n}{2n+1}$, $s = \frac{1}{2}$; б) $s_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $s = 1$; в) $s_n = \frac{13}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n$, $s = \frac{13}{6}$; г) $s_n = \frac{5}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$, расходится; д) $s_n = \frac{59}{30} - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{7^n} + (-1)^{n+1} \frac{3}{10} \left(\frac{3}{7}\right)^n$, $s = \frac{59}{30}$; е) $s_n = \frac{n}{3n+1}$, $s = \frac{1}{3}$; ж) $s_n = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$, $s = 1 - \sqrt{2}$; з) $s_n = \ln(n+1)$, расходится;

и) $s_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}$, $s = \frac{\pi}{4}$. 10. а) $r_n = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$, $N = 49$; б) $r_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}$, $N = \left[\frac{\operatorname{ctg} \varepsilon - 1}{2} \right]$; в) $r_n = \frac{1}{2(2n+1)}$, $N = 2,5 \cdot 10^5$; г) $r_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, $N = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \right]$; д) $r_n = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n$, $N = \left[\frac{\lg \frac{6\varepsilon}{13}}{\lg 0,6} \right]$; е) $r_n = -\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$, $N = 2,5 \cdot 10^5$. 11. См. упр. 9 ж). 12. $\left(1 + \frac{2}{1 \cdot 2}\right) - \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right) + \left(1 + \frac{2}{2 \cdot 3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \dots + \left(1 + \frac{2}{n(n+1)}\right) - \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \dots$

13. а), б), в), г), ж). 14. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}$. 15. а) $8 - 5(x+1) + (x+1)^3$; б) $(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$; в) $64 - 192(x+2) + 240(x+2)^2 - 160(x+2)^3 + 60(x+2)^4 - 12(x+2)^5 + (x+2)^6$. 16. $f(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{81}x^3 + \frac{20}{243} \int_0^x (t+1)^{-\frac{8}{3}} (x-t)^3 dt$, $0 \leq r_3(x) \leq \frac{5}{243}x^4$. 17. $f(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \frac{32}{5}x^5 - \int_0^x \frac{(x-t)^5}{\left(\frac{1}{2} + t\right)^6} dt$, $|r_5(x)| \leq \frac{32}{3}x^6$. 18. $f(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \dots$, $n \in N$, $x \in [0; \infty]$. 19. $f(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + r_{2n+1}(x)$, $|r_{10}(x)| = |r_{11}(x)| < 3 \cdot 10^{-5}$. 20. $|r_3(x)| = |r_4(x)| < 3 \cdot 10^{-4}$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. 21. $|x| \leq 0,22$. 22. 1,0355. 23. 0,8480. 24. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \dots$. 25. $|r_2(x)| \leq \frac{3}{16}x^3$. 26. $f(x) = -6 + 21(x-2) +$

$$+ 50(x-2)^2 + 35(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5, \quad f(2,1) \approx -3,4, \quad f(2,1) = -3,36399, \quad \Delta = 0,03601, \quad \frac{\Delta}{|f(2,1)|} \approx 0,01. \quad 27. |x| \leq 0,77. \quad 28. f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} +$$

$$+ \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}, \quad 9 \text{ членов. } 29. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}, \quad x \in]-3; 1[. \quad 30. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \times$$

$$\times (x+4)^n, \quad x \in]-6; -2[. \quad 31. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^{2n}, \quad x \in]-2; 0[. \quad 32. \text{ а) } x^2 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} x^{2n+2}, \quad |x| < 1; \text{ б) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in]-\infty; \infty[;$$

$$\text{в) } \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in]-\infty; \infty[; \text{ г) } \frac{3}{32} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \times$$

$$\times \frac{3^{2n-1} - 2^{2n+1} + 5}{(2n)!} \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}, \quad x \in]-\infty; \infty[; \text{ д) } - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n}, \quad x \in [-1; 1[;$$

$$\text{е) } 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in]-1; 1[; \text{ ж) } x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n}, \quad x \in]-1; 1[;$$

$$\text{з) } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}, \quad x \in [-1; 1]. \quad 33. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n}, \quad x \in [-2; 0].$$

$$34. 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot 3!} (x-1)^n, \quad x \in]0; 2[.$$

$$35. \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty}, \quad \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n!}, \quad x \in]-\infty; \infty[. \quad 37. \text{ б) } \frac{1}{x}. \quad 38. \text{ а) } x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)} x^{2n+1}; \text{ б) } x^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n(2n+1)} x^{6n+3}.$$

39. а) Расходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится; ж) сходится; з) сходится; и) сходится.

40. а) Расходится; б) сходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится; е) сходится; ж) расходится; з) сходится; и) сходится.

41. а) $x \in]0; \infty[$; б) $x \in]0; 1[$; в) $x \in]0; e[$.

43. а) Сходится; б) расходится; в) сходится. 44. а) Расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится; е) сходится; ж) расходится; з) расходится; и) сходится; к) расходится; л) расходится; м) сходится; н) сходится; о) сходится. 45. а) $n \geq 71$; б) $n \geq 6$; в) $n > e^{10000}$; г) $n \geq 5$; д) $n \geq 6$; е) $n \geq 5$.

$$48. \text{ а) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{1}{2^n} = 4; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} = e^7.$$

51. Расходится, если все члены второго ряда не равны нулю.

52. а) 10^6 ; б) 200; в) 3; г) $[e^{1000}] - 2$.

53. а) Расходится; б) сходится, $s = \frac{13}{8}$. 54. а) Сходится абсолютно; б) расхо-

дится; в) сходится абсолютно; г) сходится условно; д) сходится условно; е) сходится условно; ж) сходится абсолютно; з) расходится; и) сходится условно; к) сходится абсолютно; л) расходится; м) сходится условно. 55. а) В зависимости от выбора рядов (А) и (В) возможны абсолютная сходимость, условная сходимость и расходимость; б) расходится; в) сходится абсолютно. 56. Верно.

57. $\frac{2}{3}$. 59. а) $3 + 2i$; б) -1 ; в) 0. 62. а) Сходится абсолютно; б) расходится;

в) сходится условно; г) расходится; д) сходится условно; е) сходится абсолютно; ж) сходится условно; з) расходится.

$$63. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x| = 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1, \end{cases} \quad N = 3.$$

$$64. \text{ а) } x \in]-1; 1], f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in]-1; 1[, \\ 1, & \text{если } x = 1; \end{cases}$$

$$\text{ б) } x \neq -n \ (n \in \mathbb{N}), f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

$$65. \text{ а) }]-\infty; -1[\cup]1; \infty[, \text{ абсолютно; } \text{ б) }]-\infty; -\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4}; \infty[, \text{ абсолютно;}$$

$$\text{ в) }]-1; 1], \text{ абсолютно; г) }]1; \infty[, \text{ абсолютно;}$$

$$\text{ д) }]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{3}; \infty[, \text{ абсолютно; е) }]-\infty; \infty[, \text{ абсолютно; ж) }]-1; 1[, \text{ абсолютно; з) }]-1; 1[, \text{ сходится абсолютно; и) абсолютно сходится при } x \neq -1;$$

$$\text{ к) абсолютно сходится при } x \neq -1; \text{ л) } \bigcup_k [-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k], k \in \mathbb{Z}, \text{ сходится абсолютно; м) }]-\infty; \infty[, \text{ сходится абсолютно.}$$

$$66. \text{ а) } 1; \text{ б) } \sqrt{2}. \quad 67. 2, 25. \quad 68. \text{ а) } f(x) = 0, \text{ сходится неравномерно;}$$

$$\text{ б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ сходится неравномерно; в) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x \in]0; \pi[, \\ \pi & \text{не определена;} \end{cases}$$

$$\text{ г) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \pi, \\ 1 & \text{при } 1 < x < \pi, \end{cases} \text{ сходится неравномерно;}$$

$$\text{ д) } f(x) = 0, \text{ сходится равномерно; е) } f(x) = 0, \text{ сходится равномерно.}$$

$$69. f(x) = 0, \text{ сходится неравномерно. } \quad 74. \ln \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}, |x| < 1.$$

$$75. \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x, |x| < 1. \quad 76. x \in]-1; 1[.$$

$$79. s_n = \frac{x}{1-x} - \frac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^n}} \text{ при } x \neq \pm 1, s = \frac{x}{1-x} \text{ при } x \in]-1; 1[.$$

$$80. \text{ а) } [-1; 1]; \text{ б) } [-1; 1[, \text{ при } x = -1 \text{ ряд сходится условно;}$$

$$\text{ в) }]-4; 4[; \text{ г) } \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]; \text{ д) }]-1; 1[; \text{ е) }]-e; e[; \text{ ж) }]-e-2; e-2[;$$

$$\text{ з) }]2; 8[, \text{ при } x = 8 \text{ ряд сходится условно; и) }]-2; 4[; \text{ к) }]-7; -3[, \text{ при } x = -7 \text{ ряд сходится условно. } \quad 81. \text{ а) } 1, |z-i| \leq 1; \text{ б) } 1, |z| < 1; \text{ в) } \frac{1}{7}, |z| < \frac{1}{7}.$$

$$82. \text{ а) } [-3; 3[,]-3; 3]; \text{ б) }]-\infty; \infty[,]-\infty; \infty[; \text{ в) } [0; 4],]0; 4[; \text{ г) } [3; 7], [3; 7]; \text{ д) } [-1; 1[,]-1; 1].$$

$$83. \text{ а) } -\ln(1-x), x \in [-1; 1[; \text{ б) } \frac{1}{(1-x)^2}, x \in]-1; 1[; \text{ в) } \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$x \in]-1; 1[; \text{r)} \frac{1}{(1-x)^3}, \quad x \in]-1; 1[. \quad 84. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (x+1)^n, \quad x \in]-2; 0[.$$

$$85. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (x-2)^n, \quad x \in]0; 4[\quad 86. \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2 (2n-1)} x^{2n-1},$$

$$x \in [-1; 1], \quad 0! = 1; \text{б)} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2 (2n-1)} x^{2n-1}, \quad x \in]-1; 1[.$$

$$\arccos(1-2x^2) = \begin{cases} -S(x) & \text{при } x \in]-1; 0[, \\ S(x) & \text{при } x \in [0; 1[, \end{cases} \quad \text{в)} \quad x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)n},$$

$$x \in]-1; 1]. \quad 87. \quad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2n, \\ \frac{((2n-2)!)^2}{2^{2n-2}((n-1)!)^2} & \text{при } k = 2n-1, \quad 0! = 1. \end{cases}$$

$$88. \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \quad x \in]-1; 1[; \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{(2n-1)!n} x^{2n}, \quad x \in]-1; 1[.$$

$$89. \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\cos na}{\sin^n a} x^n; \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\sin na}{\sin^n a} x^n, \quad x \in]-\infty; \infty[. \quad 91. \quad \sin x \operatorname{ch} y;$$

$$\cos x \operatorname{sh} y. \quad 92. \text{a)} \cos 6 \operatorname{ch} 7, \quad -\sin 6 \operatorname{ch} 7; \text{б)} \cos 4 \operatorname{ch} 1, \quad -\sin 4 \operatorname{sh} 1; \text{в)} 0, \operatorname{sh} 8;$$

$$\text{г)} e^{x^2-y^2} \cos 2xy, \quad e^{x^2-y^2} \sin 2xy. \quad 93. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad 96. \quad \text{См. рис. 10.}$$

98. Не ограничены. 99. При действительных значениях z . 100. Упростился бы вывод соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Усложнилось бы исследование поведения функций, в частности периодичности. 101. $\cos 1 \approx 0,542$, $\Delta < 1,4 \cdot 10^{-3}$; $\cos 0,1 \approx 0,99499583$, $\Delta < 10^{-8}$. 102. 0,9511. 103. 0,3365. 104. 1,0986. 105. 3,14159. 106. а) 2,115; б) 2,031; в) 3,1072; г) 5,066; д) 3,017. 107. а) 0,4969; б) 0,012; в) 0,310. 108. а) 0,946; б) 0,098; в) 0,102; г) 0,608; д) 0,747; е) 1,004; ж) 1,030.

$$109. 0,119. \quad 110. \text{a)} \frac{1}{3}; \text{б)} \frac{1}{60}; \text{в)} \frac{2}{3}; \text{г)} 4. \quad 111. \frac{1}{2}.$$

$$112. 0,198. \quad 113. 0,246. \quad 114. 1,167. \quad 115. \text{a)} 0,877; \text{б)} -1,492. \quad 116. \text{a)} 2e^2 + \frac{1}{e}; \text{б)} 0; \text{в)} \frac{395}{2} + i \frac{1025}{12}; \text{г)} 0.$$

$$117. \lambda = 0, \mu = -\frac{1}{3}. \quad 119. \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad 120. c_0 = 0,$$

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \left(\pi^2 - \frac{6}{n^2} \right) i \quad (n \in \mathbb{N}); \quad a_0 = 2\pi^3, a_n = \frac{12\pi}{n^2}, \quad b_n = -\frac{4}{n} \left(2\pi^2 - \frac{3}{n^2} \right) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad 121. a_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_n = -\frac{2}{n^2} (1 + (-1)^n), \quad b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$122. \frac{5}{6} + \frac{1}{2} P_1(x) + \frac{1}{14} P_2(x) + \frac{1}{1680} P_4(x).$$

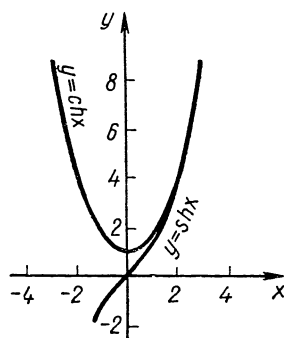


Рис. 10

123. Да, будут. В примерах а), д) сами функции непрерывны, но их производные имеют в точке $x = 0$ разрыв 1-го рода. В примере б) уже сама функция имеет разрыв 1-го рода. В примере в) функция имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$. Если ее пересопределить, положив $f(0) = 1$, то она станет непрерывной вместе с производными любого порядка. В примере г) функция на промежутке $]0; 1]$ непрерывна вместе с производными любого порядка.

$$124. \text{ а) } \pi \left(1 - \frac{3}{8} \pi + \frac{7}{24} \pi^2 \right); \text{ б) } \frac{5}{6} \pi^2. \quad 127. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \quad 128. a_0 = \frac{\pi}{2}, a_1 = -\frac{4-\pi}{2\pi},$$

$$b_1 = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{n}{\pi(n^2 - 1)} \quad (1 +$$

$$+ (-1)^n) \quad (n = 2, 3, \dots); \quad s(0) = \frac{1}{2}, \quad s(\pi) = \frac{\pi - 1}{2}, \quad s(2\pi) = \frac{1}{2}; \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) =$$

$$= -1, \quad f(2\pi) = 1. \quad 129. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad s(-\pi) = s(0) = s(\pi) = 0. \quad 130. \text{ а) } a_0 =$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}, a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}); \text{ б) } a_0 = \pi, a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}, b_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$131. \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2 + 1}{n} \sin nx \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cos x +$$

$$+ 3 \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{2}{9\pi} \cos 3x + \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots. \text{ Ряд сходится к } f(x)$$

$$\text{ на }]-\pi; 0[\cup]0; \pi[, \quad s(0) = \frac{\pi}{2}, \quad s(-\pi) = s(\pi) = 0. \quad 133. \quad s(x) = 1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad s(-2) = s(0) = s(2) = 1. \quad 134. \quad s(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16k}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kx. \quad 135. \quad s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(3 + 4k - 4k^2)} \cos \frac{(2k-1)}{2} x.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава I. Основные понятия, формула и ряд Тейлора	6
§ 1. Числовые ряды. Сходимость и расходимость числового ряда	—
1. Числовые ряды	—
2. Сумма ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды	7
§ 2. Свойства сходящихся рядов	11
1. Необходимый признак сходимости ряда. Остаток ряда	—
2. Свойства сходящихся рядов	13
§ 3. Функциональные ряды и их область сходимости	16
1. Степенные ряды	17
2. Тригонометрические ряды	18
§ 4. Формула Тейлора	—
§ 5. Разложение функций в ряд Тейлора	26
1. Ряд Тейлора	—
2. Разложение функции $y = \lg(1+x)$	29
3. Разложение функции $y = \operatorname{arctg} x$	30
4. Разложение в степенной ряд функции $y = e^x$	—
5. Разложение в степенной ряд функций $y = \sin x$, $y = \cos x$	—
6. Разложение функции $y = (1+x)^\alpha$, где $ x < 1$ и α — любое число	31
7. Разложение других элементарных функций	33
Глава II. Числовые ряды	40
§ 6. Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами	—
1. Признаки сравнения	—
2. Признаки сходимости Даламбера и Коши	42
3. Интегральный признак сходимости Коши	44
4. Примеры исследования рядов на сходимость	47
§ 7. Свойства рядов с неотрицательными членами	55
1. Перестановка членов ряда с неотрицательными членами	—
2. Группировка членов и умножение рядов с неотрицательными членами	—
§ 8. Знакопеременные ряды	58
1. Теорема Лейбница	—
2. Абсолютно сходящийся ряд	62
3. Свойства абсолютно сходящихся рядов	63
4. Свойства условно сходящихся рядов	67
§ 9. Числовые ряды в комплексной области	69

Глава III. Функциональные ряды	75
§ 10 Область сходимости функциональных рядов	—
§ 11. Равномерная сходимость функциональных рядов	79
1. Введение	—
2. Чебышевское расстояние между функциями	80
3. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности	82
4. Равномерно сходящиеся ряды. Признак Вейерштрасса	83
5. Сохранение свойства непрерывности в случае равномерной сходимости	85
§ 12. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов	87
1. Почленное интегрирование функциональных рядов	—
2. Почленное дифференцирование функциональных рядов	90
§ 13. Функции комплексного переменного. Функциональные последовательности и ряды в комплексной области	93
1. Функции комплексного переменного	—
2. Дифференцирование функций комплексного переменного	94
3. Функциональные последовательности и ряды в комплексной области	95
Глава IV. Степенные ряды	97
§ 14. Круг сходимости степенного ряда	—
1. Теорема Абеля	—
2. Область сходимости степенного ряда. Круг и радиус сходимости	98
3. Равномерная сходимость и непрерывность суммы степенного ряда	103
§ 15. Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенных рядов	106
1. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов в действительной области	—
2. Почленное дифференцирование рядов в комплексной области	110
3. Единственность разложения функции в степенной ряд	111
§ 16. Показательная и тригонометрические функции в комплексной области	114
1. Показательная функция в комплексной области	—
2. Тригонометрические функции в комплексной области. Формулы Эйлера	115
§ 17. Некоторые приложения рядов	120
1. Вычисление значений функций и интегралов	—
2. Вычисление пределов	121
3. Метод последовательных приближений	122
Глава V. Ряды Фурье	126
§ 18. Ортонормированные системы функций	—
1. Введение	—
2. Скалярное произведение функций	127
3. Ортонормированные системы функций	129
§ 19. Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье	131
1. Коэффициенты Фурье	—
2. Коэффициенты Фурье для тригонометрических систем функций	133
§ 20. Лемма Римана	135
1. Кусочно гладкие функции	—
2. Лемма Римана	138
§ 21. Достаточные условия сходимости рядов Фурье	139
1. Формула для частичных сумм ряда Фурье	—
2. Сходимость разложения кусочно гладких функций в ряды Фурье	141
3. Разложение функций, заданных на конечных промежутках, в ряд Фурье	143
4. Разложение четных и нечетных функций в ряды Фурье	—
5. Примеры разложения функций в ряды Фурье	144
Ответы к упражнениям	152

РЯДЫ

Н/К

Редактор *Л. В. Туркестанская*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *М. М. Широкова, Е. В. Леова*
Корректор *Л. С. Вайтман*

Сдано в набор 24.04.81. Подписано к печати 06.11.81. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. типограф. № 3
Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 10. Усл. кр. от. 10,25. Уч.-изд. л. 9,25.
Тираж 27000 экз. Заказ № 117. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавополиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59